



Comensurabilidade e mutações de poliedros hiperbólicos

Danielle Nunes

Tese

Rio de Janeiro  
2023

Danielle Nunes

**Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada**

# **Comensurabilidade e mutações de poliedros hiperbólicos**

Orientador: Mikhail Belolipetsky

Rio de Janeiro  
2024

**Abstract:**

Commensurability is a remarkable property because it preserves some characteristics of groups and some associated geometric characteristics. In this work, we use maximal decompositions of Coxeter polyhedra to prove that in the case of two polyhedra being non-arithmetic, when the maximal decompositions of them have different volume, they can not be commensurable. We also explore the application of this result to answer an open question about commensurability of certain pairs of mutant polyhedra. It is known that these pairs can not be distinguished by the standard algebraic invariants.

**Keywords:** polyhedron; Coxeter groups; hyperbolic geometry; commensurability; arithmetic groups.

**Resumo:** Comensurabilidade é uma propriedade notável porque preserva algumas características dos grupos e algumas características geométricas associadas. Neste trabalho, utilizamos decomposições máximas de poliedros de Coxeter para provar que no caso de dois poliedros serem não aritméticos, quando as decomposições máximas deles têm volumes diferentes, eles não podem ser comensuráveis. Também exploramos a aplicação deste resultado para responder a uma questão em aberto sobre a comensurabilidade de certos pares de poliedros mutantes. Sabe-se que estes pares não podem ser distinguidos pelos invariantes algébricos padrão.

**Palavras chave:** Poliedros; grupos de Coxeter; geometria hiperbólica; comensurabilidade; grupos aritméticos.

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”

## **Agradecimentos**

Ao meu parceiro na vida e na matemática, Vinícius França. Por me acalmar nos momentos difíceis, pelo companheirismo e por toda ajuda prestada.

À minha família e amigos, por compreender minhas ausências durante o processo.

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 O espaço hiperbólico . . . . .	5
1.2 Poliedros em $\mathbb{H}^3$ . . . . .	7
1.3 Aritmetividade e comensurabilidade . . . . .	11
<b>2 Exemplos com observações</b>	<b>13</b>
<b>3 Poliedros e colagens</b>	<b>25</b>
3.1 Poliedros básicos . . . . .	25
3.2 Sequências de colagens e mutações . . . . .	27
<b>4 Comensurabilidade colagem e mutações</b>	<b>31</b>
4.1 Colagem de dois poliedros e suas mutações . . . . .	31
4.2 Um exemplo de Gyurek e Roeder . . . . .	35
4.3 Sequência de colagem de poliedros . . . . .	38
4.4 Simetrias em uma sequência de poliedros . . . . .	39
4.5 Discussão sobre algumas consequências . . . . .	45

## Lista de Tabelas

---

4.1	Colagem sucessiva com progressão das faces . . . . .	43
4.2	Propagação de uma rotação ao longo das colagens . . . . .	44
4.3	Ângulos da face alterada pela rotação . . . . .	44

# Introdução

---

Antes de discorrer sobre comensurabilidade e mutações de poliedros hiperbólicos, gostaríamos de destacar o berço dessa teoria e algumas referências de trabalhos e matemáticos dos séculos XIX, XX e XXI. Pois, de fato, a riqueza da teoria desenvolvida no século XXI sobre poliedros em espaço de curvatura constante negativa se dá exatamente por estarmos tratando de uma geometria não euclidiana.

A geometria hiperbólica foi concebida no século XIX, pelos matemáticos Gauss, Lobachevsky e Bolyai como uma alternativa à geometria euclidiana. Inicialmente, foi chamada de geometria não euclidiana, pois nasceu da tentativa de negar o quinto postulado de Euclides. Por conta da reformulação da geometria não euclidiana em termos de um tensor de curvatura, feita por Riemann, permitiu-se que a geometria hiperbólica se aplicasse em dimensões maiores. Beltrami (1868) foi um dos primeiros a aplicar a geometria Riemanniana para espaços de curvatura negativa, impulsionando assim essa forma de trabalhar com geometria hiperbólica.

Já no início do século XX podemos destacar as contribuições de Coxeter (1907-2003) que explorou as conexões entre os grupos e a geometria hiperbólica. Por conta de seu trabalho com grupos discretos gerados por reflexão, esses ficaram conhecidos como *Grupos de Coxeter*. Outro matemático de extrema importância foi Vinberg (1937-2020), que teve brilhantes contribuições, sistematizando a teoria de grupos de reflexão em termos de matrizes de Gram e poliedros fundamentais, generalizando a teoria de Coxeter e a conectando com o conceito de aritmetividade. Sua dedicação a esses temas culminou no desenvolvimento de um critério que determina se um grupo é aritmético, que pode ser utilizado como definição de aritmetividade quando consideramos subgrupos de isometrias do espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ , que são de Coxeter. Referências para estas entre outras contribuições de Vinberg podem ser vistas em [ABG<sup>+</sup>21], uma biografia em tributo a sua vida e trabalho.

E ainda, gostaríamos de salientar as contribuições de Andreev, que foi orientado por Vinberg, e que desenvolveu um poderoso teorema que nos diz que dado um conjunto de ângulos entre as faces de um possível poliedro, quando esses respeitam certas condições, nos é garantida a existência e unicidade, a menos de isometria, de um poli-



edro com esses ângulos em  $\mathbb{H}^3$ . Também é importante frisar a pesquisa de Mostow que realizou notáveis conexões entre geometria, topologia e teoria de grupos. Dentre elas, o seu teorema de rigidez que prova que a estrutura de uma variedade fechada, com dimensão maior ou igual a três e com curvatura constante negativa, está totalmente determinada pelo seu grupo fundamental. Com isso, variedades com grupos fundamentais isomorfos são, de fato, isométricas.

Nesse contexto, gostaríamos de enfatizar as contribuições de matemáticos da atualidade, de grande relevância para construção da teoria sobre subgrupos de isometria de  $\mathbb{H}^3$ , grupos de reflexão, comensurabilidade e aritmeticidade; e que desenvolveram pesquisas diretamente relacionadas com o tema que trataremos. Como Margulis com seu teorema fundamental que relaciona comensurabilidade e aritmeticidade, que se aplica sobre os grupos de isometria de  $\mathbb{H}^n$  e que nos garante que há estrutura de reticulado para o comensurador de um grupo não aritmético. E também Felikson e sua descrição sobre todas as possíveis decomposições de poliedros hiperbólicos de base triangular [Fel04]. Por fim, Roland e Gyurek [GR19], cujo artigo impulsionou a construção dessa tese.

Quando consideramos um poliedro  $P$  no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ , temos que cada uma de suas faces está contida num hiperplano. Podemos pensar então no grupo  $\Gamma = \Gamma(P)$  gerado por reflexões nos hiperplanos que delimitam as faces de  $P$ . Existem casos em que  $P$  é região fundamental para  $\Gamma(P)$ , que é quando consideramos poliedros cujos ângulos diedrais são todos submúltiplos inteiros de  $\pi$ , os chamados poliedros de Coxeter. Se o poliedro  $P$  que consideramos tem volume finito,  $\mathbb{H}^n/\Gamma$  é uma orbvariedade Riemanniana de volume finito.

Dois subgrupos de um grupo  $G$  são comensuráveis quando a interseção deles tem índice finito em ambos os subgrupos. Certas propriedades de um grupo são preservadas por comensurabilidade, ou seja se  $H$  tem uma determinada propriedade e  $\tilde{H}$  é comensurável a  $H$ , temos que  $\tilde{H}$  também possui a propriedade de  $H$ . Propriedades com essa característica serão amplamente buscadas e utilizadas neste trabalho.

Existem referências que trabalham com invariantes algébricos por comensurabilidade, dentre elas [Gug15] e [Dot21]. Visto que estes invariantes não são suficientes para determinar, em qualquer caso, se dois poliedros são comensuráveis, seguimos em busca de propriedades geométricas que fossem invariantes por comensurabilidade e que pudessem ser utilizadas quando os critérios algébricos são insuficientes.

Um importante conceito a cerca de comensurabilidade é o comensurador de um grupo. O comensurador de um grupo  $H$  em  $G$ ,  $\text{Com}_G(H)$ , que é um subgrupo de  $G$ , tal que para  $g \in \text{Com}_G(H)$  temos que  $S = gHg^{-1} \cap H$  tem índice finito em  $H$  e  $gHg^{-1}$ , ou seja  $S$  é comensurável a  $H$  e  $gHg^{-1}$ . Estudar o comensurador de um grupo também traduz propriedades do grupo, por exemplo, um notável teorema de Margulis, já mencionado, nos diz que para um subgrupo de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  o comensurador do grupo em  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  é discreto se e somente se o subgrupo é não aritmético.

Nesse sentido estamos interessados no problema de comensurabilidade para grupos hiperbólicos de Coxeter de covolume finito e na construção de exemplos de famílias de poliedros não aritméticos construídas pela colagem e rotação de poliedros básicos definidos na Seção 3.1. Os resultados principais da tese se encontram nos Capítulos 2 e 4.

Estruturamos esta tese em capítulos e um breve panorama do que foi desenvolvido em cada um deles se encontra a seguir.

No Capítulo 1 explicitamos os conceitos prévios necessários para o desenvolvimento deste trabalho, exemplificando e ilustrando alguns conceitos.

No Capítulo 2 temos uma aplicação prática do critério de Vinberg para aritmetividade. Onde produzimos, com contas explícitas, exemplos de aplicação do critério de Vinberg para poliedros com características especiais, como definido na Seção 3.1. O desenrolar do primeiro exemplo deste capítulo foi a chave para compreender numericamente o que está por trás da condição “poliedros com 3 faces adjacentes que se intersectam duas a duas”. Com isso, pôde ser visto, sob o olhar do critério de Vinberg, que é possível obter uma restrição nos três ângulos diedrais das três faces adjacentes de um poliedro mais geral, de forma que, com ela, o poliedro seja sempre não aritmético. Assim sendo concluímos o seguinte corolário do critério de Vinberg:

**Critério de não aritmetividade 2:** Seja  $P$  um poliedro com 3 faces adjacentes que todas não se intersectam simultaneamente mas se intersectam duas a duas formando o mesmo ângulo diedral  $\frac{\pi}{q}$ , teremos que, se  $q > 13$  e  $q$  não é divisível por 3 então  $P$  não é aritmético.

Este critério se aplica, por exemplo, na análise de famílias de poliedros do tipo  $C$ , que está definido na Seção 3.1.

No Capítulo 3 explicitamos uma família de poliedros de base triangular com boas propriedades de colagem. Formulamos também um grafo que denota colagem de dois poliedros ao longo de uma face. E ainda relacionamos propriedades do grupo resultante de uma colagem de dois poliedros com o exemplo presente no Capítulo 1, visto que, para determinadas colagens, há um padrão que se repete na matriz de Gram.

No Capítulo 4 aproveitando uma característica especial do espaço de curvatura negativa constante garantida pelo teorema de rigidez de Mostow-Prasad e utilizando o teorema de Margulis para grupos não aritméticos, elaboramos uma forma de verificar se dois grupos, cada um determinado por um poliedro diferente, são comensuráveis e assim enunciamos a seguinte resultado:

**Teorema de Rigidez.** Sejam  $P_1$  poliedro de Coxeter não aritmético e  $P_2$  um outro poliedro de Coxeter. Se suas decomposições maximais de Coxeter não admitem nenhuma simetria e possuem volumes distintos, então os grupos  $\Gamma(P_1)$  e  $\Gamma(P_2)$  não são comensuráveis.

Em seguida, finalizamos a segunda seção deste capítulo utilizando nosso critério para determinar que dois poliedros, para os quais a comensurabilidade ainda não era conhecida, segundo o artigo [GR19], eram de fato não comensuráveis.

Ainda neste capítulo, investigamos simetrias de reflexão em poliedros e exploramos o que definimos como *face solitária*, que é uma face que não é congruente a nenhuma outra face do poliedro. Através disso provamos então que se encontramos uma face solitária que não tem simetria o poliedro o qual ela pertence também não tem. Exemplificamos também o que ocorre com um poliedro após sua mutação em relação as simetrias de suas faces.

Por fim, encerramos nossa discussão apontando algumas referências para teoria e deixando alguns questionamentos em aberto que se relacionam com a teoria construída neste trabalho.

# 1

## Preliminares

---

### 1.1 O espaço hiperbólico

Para estudar o problema de comensurabilidade de grupos hiperbólicos de Coxeter com covolume finito, a seguir, vamos fixar algumas definições a fim de estabelecer notação.

Primeiramente vamos definir o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  e sua forma bilinear utilizando o modelo do hiperboloide.

**Definição 1.** *Podemos definir o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  como a variedade*

$$\mathbb{X}^+ = \{x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{3,1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\},$$

*juntamente com o produto definido por*

$$\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

*que é conhecido como produto de Lorentz.*

A métrica riemanniana definida em  $\mathbb{X}^+ \subset \mathbb{R}^{3,1}$  que faz de  $\mathbb{H}^3 = (\mathbb{X}^+, \langle, \rangle)$  uma variedade de curvatura constante  $-1$  é a induzida pelo produto de Lorentz definido acima.

Observe que podemos identificar o espaço tangente de  $x \in \mathbb{X}^+$  com o complemento ortogonal de  $x$ . Assim sendo, as isometrias de  $\mathbb{H}^3$  podem ser vistas como estabilizadores do vetor  $(1, 0, 0, 0)$  cujas restrições às coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  sejam isometrias de  $\mathbb{R}^3$  que fixam a origem. Esse grupo de isometrias é conhecido como  $SO^+(1, 3)$  e pode ser escrito da forma matricial como na matriz abaixo, onde  $A$  está em  $SO(3)$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & A_{3 \times 3} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Um hiperplano em  $\mathbb{H}^3$  é representado pela interseção de um hiperplano passando pela origem em  $\mathbb{R}^{3,1}$  com  $\mathbb{X}^+$ . Dado um hiperplano  $H_v$  com seu vetor ortogonal unitário  $v$  em  $\mathbb{R}^{3,1}$  (i.e., um *plano orientado*), podemos escrever  $H_v$  e os semi planos  $S_v^-$  e  $S_v^+$  determinados por ele como:

$$\begin{aligned} H_v &= \{w \in \mathbb{H}^3 \mid \langle w, v \rangle = 0\}, \\ S_v^- &= \{w \in \mathbb{H}^3 \mid \langle w, v \rangle \leq 0\} \text{ e} \\ S_v^+ &= \{w \in \mathbb{H}^3 \mid \langle w, v \rangle \geq 0\}. \end{aligned}$$

O produto de Lorentz determina naturalmente o ângulo  $\alpha$  entre dois vetores unitários  $u, v$  no espaço. Onde

$$\langle u, v \rangle = -\cos \alpha.$$

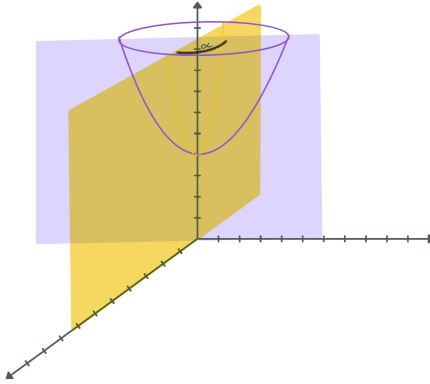


Figura 1.1: Modelo do hiperboloide e representação do ângulo entre dois planos em  $\mathbb{H}^2$ .

Considerando que a relação de dois planos é determinada pelo vetor ortogonal que determina cada um, dizemos que dois planos  $H_u, H_v$  se *intersectam em uma linha*

se  $\langle u, v \rangle < 1$  e seu ângulo  $\alpha$  é determinado pelo produto acima, quando  $\langle u, v \rangle = 1$  dizemos que se *intersectam em um único ponto no infinito*, e nesse caso consideramos que o ângulo diedral é zero. Como dado  $v \in \mathbb{R}^{3,1}$  temos que todo  $w \in \mathbb{R}^{3,1}$  pode ser escrito de forma única como  $w = \tilde{w} + v$ . Podemos escrever uma *reflexão* em relação ao plano  $H_v$  como

$$r_v(w) = \tilde{w} - v.$$

Como uma reflexão preserva o produto de Lorentz, temos que, quando vista em  $\mathbb{H}^3$ , é uma isometria.

## 1.2 Poliedros em $\mathbb{H}^3$

A intersecção de um número finito de semi espaços determinados por planos  $H_{v_i}$  determina um *poliedro*  $P$ . Chamaremos  $F_i$  a *face* do poliedro  $P$  contida em  $H_{v_i}$  onde  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $m$  é o número de faces de  $P$ .

Para cada duas faces adjacentes de  $P$ , faz sentido falar do ângulo entre elas, que está determinado pelo produto de Lorentz dos vetores ortogonais aos planos em que cada face está contida. Chamamos esse ângulo determinado por duas faces de  $P$  de *ângulo diedral*.

Quando os ângulos entre os planos que determinam um poliedro são submúltiplos inteiros de  $\pi$  temos que o grupo  $\Gamma(P)$  de reflexões associado ao poliedro  $P$  age de forma discreta em  $\mathbb{H}^3$ . Ou seja, a órbita de cada ponto de  $\mathbb{H}^3$  por  $\Gamma(P)$  é um conjunto discreto em  $\mathbb{H}^3$ . Um poliedro  $P$  em  $\mathbb{H}^3$  cujos ângulos são submúltiplos inteiros de  $\pi$  é chamado de *poliedro de Coxeter*.

**Observação.** *Os poliedros de Coxeter possuem uma propriedade interessante: a ação em  $\mathbb{H}^3$  do grupo  $\Gamma(P)$ , gerado pelas reflexões determinadas pelos planos que contêm as faces de  $P$ , recobre todo  $\mathbb{H}^3$  sem que haja sobreposições de  $\overset{\circ}{P}$  e  $g\overset{\circ}{P}$  para  $g \in \Gamma(P)$ , ou seja,  $P$  respeita a definição destacada a seguir, portanto é um domínio fundamental.*

**Definição (Domínio Fundamental).** *Seja  $X$  um espaço métrico. Um domínio fundamental para uma ação de um grupo  $\Gamma$  discreto em  $\text{Isom}(X)$  é um subconjunto  $F \subset X$  fechado, poliedral, tal que :*

$$a) \bigcup_{g \in \Gamma} gF = X$$

$$b) \overset{\circ}{F} \cap g\overset{\circ}{F} = \emptyset \text{ para todo } g \neq 1 \text{ em } \Gamma, \text{ onde } \overset{\circ}{F} \text{ é o interior de } F.$$

Além de  $P$  ser um domínio fundamental para um grupo discreto  $\Gamma(P)$  temos também que um domínio fundamental de qualquer grupo discreto de reflexões em  $\mathbb{H}^3$  é um poliedro de Coxeter.

É possível representar um poliedro de Coxeter de duas formas. Uma delas é figurativamente representando todos os lados através de um poliedro que descreve a relação entre todas as faces adjacentes entre si. E outra possibilidade é através de um grafo, que definiremos a seguir, que representa as relações entre suas faces. Veja a Figura 1.2.

**Definição 2 (Diagrama de Coxeter).** *Um diagrama de Coxeter é uma representação gráfica de um poliedro. As faces  $F_i$  de  $P$  são vértices  $v_i$ . Dois vértices são relacionados pela seguinte regra:*

- $v_i$  é ligado a  $v_j$  por uma aresta rotulada por  $k$  se  $\angle F_i F_j = \frac{\pi}{k}$ . Se  $k = 2$  o lado é omitido e se  $k = 3, 4, 5$  ou  $6$  rotulamos o lado por  $(k - 2)$  linhas.
- $v_i$  é ligado a  $v_j$  por um lado em negrito se  $F_i$  é paralelo a  $F_j$ .
- $v_i$  é ligado por  $v_j$  por um lado pontilhado e rotulado por  $\cosh(d)$  se  $F_i$  e  $F_j$  divergem ( $d$  é a distância hiperbólica de  $F_i$  a  $F_j$ ).

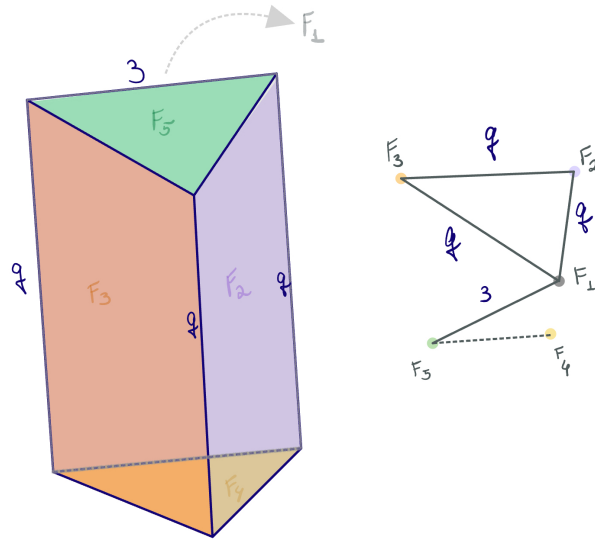


Figura 1.2: Representação geométrica do poliedro e seu grafo de Coxeter.

**Exemplo 1.** *Um diagrama de Coxeter para um poliedro com 3 faces adjacentes que se intersectam duas a duas (um 3-circuito) com ângulo diedral  $\frac{\pi}{q}$  e que todas as 3 se intersectam com uma face triangular determinada por 3 lados cujos ângulos diedrais associados são  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  e com uma face triangular determinada por 3 lados cujos ângulos diedrais associados são  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ . A Figura 1.2 ilustra geometricamente e descreve o grafo do poliedro descrito.*

Também é possível representar informações de um poliedro através de uma matriz, que chamaremos *matriz de Gram*. Importantes conceitos foram desenvolvidos por Vinberg em [Vin67] a cerca da matriz de Gram e verificação de aritmetividade de um poliedro em  $\mathbb{H}^3$ .

**Definição 3 (Matriz de Gram).** *Definimos uma matriz de Gram para o conjunto de vetores  $\{v_1, \dots, v_n\}$  com  $\langle v_i, v_i \rangle = 1$  por  $a_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$*

Nesse contexto, podemos tomar cada vetor  $v_i$  que definem o plano  $H_{v_i}$  que delimita o poliedro  $P$  de forma que  $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ . Assim, podemos escrever a matriz definida acima como  $a_{i,j} = -\cos(\theta_{i,j})$  onde  $\theta_{i,j} = \frac{\pi}{m_{i,j}}$  é o ângulo diedral entre as faces determinadas por  $H_{v_i}$  e  $H_{v_j}$ .

**Definição 4.** *Seja  $G = (a_{i,j})$  uma matriz quadrada. Definimos um produto cíclico das entradas de  $G$  como  $c_{i_1, i_2} c_{i_2, i_3} \dots c_{i_{k-1}, i_k} c_{i_k, i_1}$ . Dizemos que um produto cíclico é irredutível se  $i_1, \dots, i_k$  são distintos.*

É interessante observar que produtos cíclicos das entradas de uma matriz podem ser escritos como produtos de ciclos irredutíveis e que  $a_{i,j}^2$  é um produto cíclico.

Dado um conjunto de faces e os ângulos diedrais que elas determinam entre si não necessariamente determina-se um poliedro de volume finito em  $\mathbb{H}^3$ , há condições que devem ser respeitadas para que um poliedro exista. A fim de desenvolver notação para as condições de existência, chamaremos *k-circuito* os  $k$  lados dados pela interseção duas a duas de  $k$  faces adjacentes cuja interseção com uma face de  $P$  determina uma curva fechada formada pelos lados desta face.

**Exemplo 2.** *No exemplo anterior, ilustrado pela Figura 1.2 os lados da face verde, denominada  $F_5$ , estão determinados pelas faces adjacentes,  $F_1, F_2$  e  $F_3$  determinando uma curva fechada, portanto essas faces formam um 3-circuito determinado pelos lados de ângulo diedral  $\frac{\pi}{q}$ .*

A seguir, gostaríamos de destacar um importante teorema de existência para poliedros em  $\mathbb{H}^3$ . Uma prova com detalhes para esse teorema pode ser encontrada em [RHD07].



**Teorema 1** (Teorema de Andreev). [And70]. *Dado um conjunto com mais de 4 de faces que não possui nenhum ângulo diedral obtuso, sendo  $e_i$  o lado associado a uma face e  $\alpha_i$  o ângulo diedral associado a esse lado. Existe um poliedro compacto determinado por estas faces se somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

- Para cada lado  $e_i$ ,  $\alpha_i > 0$ .
- Quando três lados distintos se encontram em um vértice,  $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k > \pi$ .
- Quando temos um 3-circuito de lados  $e_i, e_j, e_k$  então  $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k < \pi$ .
- Quando temos um 4-circuito de lados  $e_i, e_j, e_k, e_l$  então  $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \alpha_l < 2\pi$ .
- Quando temos uma face com 4 lados  $e_1, e_2, e_3, e_4$  com lados  $e_{1,2}, e_{2,3}, e_{3,4}, e_{4,1}$  (onde  $e_{i,j}$  corresponde ao lado que passa pelo vértice de encontro de  $e_i$  com  $e_j$ ) então,

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_{1,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,4} + \alpha_{4,1} < 3\pi;$$

$$\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_{1,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,4} + \alpha_{4,1} < 3\pi.$$

Além disso, esse poliedro é único a menos de isometrias de  $\mathbb{H}^3$ .

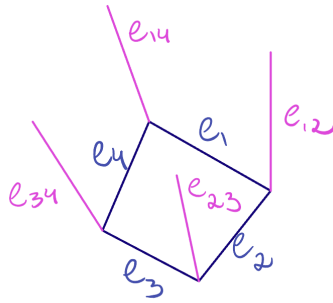


Figura 1.3: Representação de uma face com 4 lados e os ângulos diedrais que encontram seus vértices.

**Observação 1.** A escolha de poliedros com ângulos diedrais agudos se da pela propriedade especial que estes poliedros possuem. De acordo com [VMA<sup>+</sup>93] um poliedro com ângulos diedrais agudos possui faces com ângulos agudos também e por [And70] os hiperplanos de faces não adjacentes de um poliedro de ângulos diedrais agudos não se intersectam.

**Exemplo 3.** No exemplo dado anteriormente, representado na Figura 1.2, nos temos condições para que o poliedro apresentado exista. Utilizando as restrições do Teorema de Andreev temos:

$$\frac{3\pi}{q} < \pi$$

portanto  $q > 3$ . E também

$$\frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \geq \pi$$

portanto  $q \leq 6$ . Dessa forma  $\{4, 5, 6\}$  é o conjunto dos possíveis valores de  $q$ .

### 1.3 Aritmetividade e comensurabilidade

Quando estudamos o comensurador de um grupo este traduz algumas propriedades ligadas ao grupo em questão. Em nosso contexto, um subgrupo discreto de covolume finito em  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  é chamado *reticulado*. A noção de aritmetividade e comensurabilidade de reticulados estão diretamente ligadas; uma vez que através do teorema de Margulis temos que um reticulado em  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  tem comensurador em  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  discreto se e somente se é não aritmético.

**Definição 5 (O comensurador).** O comensurador de um grupo  $\Gamma_1 < H$  é um conjunto  $\text{Com}(\Gamma_1) = \{\gamma \in H; \gamma\Gamma_1\gamma^{-1} \cap \Gamma_1 \text{ tem índice finito em } \Gamma_1 \text{ e em } \gamma\Gamma_1\gamma^{-1}\}$ .

Existem definições gerais do que seria um grupo aritmético, mas quando estamos trabalhando com grupos hiperbólicos de Coxeter o Critério de Vinberg, descrito a seguir, se encaixa como definição no nosso contexto. Para uma prova do teorema apresentado veja [Vin67].

**Teorema 2 (Critério de Vinberg para Aritmetividade).** Seja  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^m)$  um grupo de Coxeter de posto  $n$  e denote por  $G = (g_{ij})$  para  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  sua matriz de Gram. Seja  $\tilde{K}$  um corpo gerado pelas entradas de  $G$ , e seja  $K(\Gamma)$  um corpo gerado por todos os possíveis ciclos de  $G$ . Então  $\Gamma$  é quasi-aritmético se e somente se

i)  $\tilde{K}$  é totalmente real; (Equivalentemente,  $\tilde{K}$  é gerado sobre  $\mathbb{Q}$  por raízes de um polinômio de coeficientes inteiros cujas raízes são todas reais.)

ii) para qualquer mergulho  $\sigma : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}$  que não é a identidade em  $K(\Gamma)$ , a matriz  $G^\sigma$ , obtida por aplicar  $\sigma$  a todos os elementos da matriz  $G$ , é positiva semidefinida.

Além disso, o grupo quasi-aritmético  $\Gamma$  é aritmético se e somente se

iii) os ciclos de  $2G$  são inteiros algébricos em  $K(\Gamma)$ . Em ambos os casos  $\Gamma$  é definida sobre  $K(\Gamma)$ .

O corpo  $K(\Gamma)$  obtido pelos possíveis ciclos da Gram matriz  $G$  é conhecido como *corpo de Vinberg* associado a  $\Gamma$ . O resultado a seguir nos dá um exemplo de um invariante algébrico por comensurabilidade e pode ser encontrado em [Dot21].

**Proposição 1.** *Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2 < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  dois grupos cofinitos de Coxeter,  $n \geq 2$ . Se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são comensuráveis, os seus corpos de Vinberg associados coincidem, ou seja,  $K(\Gamma_1) = K(\Gamma_2)$ .*

# 2

## Exemplos com observações

---

A partir de um poliedro com um 3-circuito, determinado por três ângulos diedrais iguais a  $\pi/q$ ; utilizando a representação por sua matriz de Gram, realizamos os testes do critério de Vinberg na intenção de verificar se o poliedro era aritmético. Em meio às contas desse exemplo, acabamos encontrando padrões que se repetem na *Gram matriz* de um poliedro mais geral, que contenha ainda um 3-circuito, e com isso desenvolvemos uma família infinita de poliedros não aritméticos com estas características.

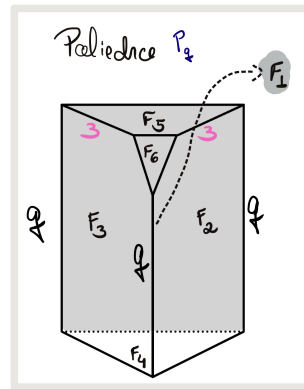


Figura 2.1: Tipo de poliedro com um 3-circuito

**Exemplo 4.** Considere o poliedro da Figura 2.1. Escrevemos a matriz de Gram, multiplicada por 2, deste poliedro como:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 0 & 0 & c_{1,6} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 0 & -2 \cos \frac{\pi}{3} & 0 \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & 0 & -2 \cos \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & c_{4,5} & c_{4,6} \\ 0 & -2 \cos \frac{\pi}{3} & -2 \cos \frac{\pi}{3} & c_{4,5} & 2 & 0 \\ c_{1,6} & 0 & 0 & c_{4,6} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 0 & 0 & c_{1,6} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 0 & -1 & 0 \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & c_{4,5} & c_{4,6} \\ 0 & -1 & -1 & c_{4,5} & 2 & 0 \\ c_{1,6} & 0 & 0 & c_{4,6} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Usando o método de Laplace, calcularemos os determinantes das submatrizes  $n \times n$  de  $G$  para  $n > 4$ . Sabemos que esses determinantes são nulos, e com isso encontraremos os termos desconhecidos da matriz  $G$ . Chamaremos de  $L$  a submatriz de  $G$  destacada em verde,  $L$  tem determinante nulo, e assim podemos encontrar  $c_{4,5}$ .

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 0 & 0 \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 0 & -1 \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{2} & c_{4,5} \\ 0 & -1 & -1 & c_{4,5} & 2 \end{pmatrix}. \text{ Considere as submatrizes de } L$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 0 \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -1 \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \textcircled{2} \end{pmatrix} \text{ e } J = \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 0 \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -1 \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{c_{4,5}} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Temos que } J' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 \end{pmatrix} \text{ é uma submatriz de } J$$

Usando o metodo de Laplace para cálculo de determinante, temos:

$$\text{Det}(L) = 2\text{Det}(S) - c_{4,5}^2 \text{Det}(J') = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{Det}(J') = 2\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 \end{pmatrix} + 2 \cos \frac{\pi}{q} \text{Det} \begin{pmatrix} -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 \end{pmatrix} - 2 \cos \frac{\pi}{q} \text{Det} \begin{pmatrix} -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \end{pmatrix}.$$

As duas matrizes destacadas em amarelo diferem apenas

por permutação de coluna, ou seja o determinante é o mesmo a menos de mudança de sinal. Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{Det}(J') &= 2\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{q} (-4 \cos \frac{\pi}{q} - 4 \cos^2 \frac{\pi}{q}) \\
&= 2(4 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{q}) + 2 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{q} (-4 \cos \frac{\pi}{q} - 4 \cos^2 \frac{\pi}{q}) \\
&= \left( 2 \cdot 4(1 - 3 \cos^2 \frac{\pi}{q} - 2 \cos^3 \frac{\pi}{q}) \right) \\
\text{Det}(S) &= 2\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 \end{pmatrix} \\
+ \text{Det} &\left( \begin{array}{ccc} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right) - \text{Det} \left( \begin{array}{ccc} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

*As duas matrizes destacadas em amarelo diferem apenas por permutação de coluna, ou seja o determinante é o mesmo a menos de mudança de sinal.*

$$Det(S) = 2Det \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 \end{pmatrix}}_A + 2Det \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

$$\begin{aligned} Det(A) &= 2 \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 \end{pmatrix} + 2 \cos \frac{\pi}{q} \begin{pmatrix} -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 \end{pmatrix} \\ &\quad - 2 \cos \frac{\pi}{q} \begin{pmatrix} -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{q} \begin{pmatrix} -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 4 \left( 1 - 3 \cos^2 \frac{\pi}{q} - 2 \cos^3 \frac{\pi}{q} \right) \end{aligned}$$

$$Det(B) = Det \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} \end{pmatrix} - Det \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 \end{pmatrix} = 4(-\cos \frac{\pi}{q} - 1)$$

Portanto,

$$Det(S) = 2^4 [1 - 3 \cos^2 \frac{\pi}{q} - 2 \cos^3 \frac{\pi}{q}] + 2^3 [-\cos \frac{\pi}{q} - 1] = 2^3 [1 - 6 \cos^2 \frac{\pi}{q} - 4 \cos^3 \frac{\pi}{q} - \cos \frac{\pi}{q}]$$

$$\begin{aligned} Det(L) &= 2 \cdot 2^3 [1 - 6 \cos^2 \frac{\pi}{q} - 4 \cos^3 \frac{\pi}{q} - \cos \frac{\pi}{q}] - c_{4,5}^2 \left( 2^3 (1 - 3 \cos^2 \frac{\pi}{q} - 2 \cos^3 \frac{\pi}{q}) \right) = 0; \\ c_{4,5}^2 &= \frac{2[1 - 6 \cos^2 \frac{\pi}{q} - 4 \cos^3 \frac{\pi}{q} - \cos \frac{\pi}{q}]}{1 - 3 \cos^2 \frac{\pi}{q} - 2 \cos^3 \frac{\pi}{q}}. \end{aligned}$$



Analogamente, encontramos  $c_{ij}$  escolhendo submatrizes de  $G$  e excluindo a linha e a coluna que não esta destacadas em verde.

$$G = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 0 \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 0 \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} c_{1,6} \\ -1 \\ -1 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & c_{4,5} & c_{4,6} \\ \begin{matrix} 0 & -1 & -1 \\ c_{1,6} & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} c_{4,5} \\ c_{4,6} \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

E com isso nos temos que:

$$c_{1,6}^2 = \frac{4(1 - 6 \cos^2 \frac{\pi}{q} - 4 \cos^3 \frac{\pi}{q} - \cos \frac{\pi}{q})}{1 - \cos^2 \frac{\pi}{q} - \cos \frac{\pi}{q}}$$

$$G = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 0 \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 0 \\ -2 \cos \frac{\pi}{q} & -2 \cos \frac{\pi}{q} & 2 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} c_{1,6} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & c_{4,5} & c_{4,6} \\ \begin{matrix} 0 & -1 & -1 \\ c_{1,6} & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} c_{4,5} \\ c_{4,6} \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$c_{4,6} = \frac{2c_{1,6}(\cos \frac{\pi}{q} + \cos^2 \frac{\pi}{q})}{c_{4,5}(1 - 3 \cos^2 \frac{\pi}{q} - 2 \cos^3 \frac{\pi}{q})}$$

$$c_{4,6}^2 = \frac{2^3(\cos \frac{\pi}{q} + \cos^2 \frac{\pi}{q})^2}{(1 - 3 \cos^2 \frac{\pi}{q} - 2 \cos^3 \frac{\pi}{q}) \cdot (1 - \cos^2 \frac{\pi}{q} - \cos \frac{\pi}{q})}$$

Agora podemos analisar os termos  $c_{i,j}$  para alguns valores de  $q$ . Para  $q = 4$ , temos

$$\begin{aligned}c_{1,6}^2 &= 4(10 + 7\sqrt{2}); \\c_{4,5}^2 &= 2(2 + \sqrt{2}); \\c_{4,6}^2 &= 4(2 + \sqrt{2})^2.\end{aligned}$$

Isto é, são todos inteiros algébricos.

Para  $q = 6$

$$\begin{aligned}c_{1,6}^2 &= \frac{2^3(31 + 18\sqrt{3})}{11}; \\c_{4,5}^2 &= 2(1 + \sqrt{3}); \\c_{4,6}^2 &= \frac{12}{11}(7 + 3\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Os termos  $c_{4,6}$  e  $c_{1,6}^2$  não são inteiros algébricos.

A soma, a diferença e o produto de dois inteiros algébricos é também um inteiro algébrico. Assim se todos os  $c_{i,j}$  são inteiros algébricos os ciclos de  $2G$  também serão.

Para grupos hiperbólicos de reflexão, a aritmeticidade pode ser checada utilizando o critério de Vinberg já mencionado no Capítulo 1:

**Teorema 3 (Critério de Vinberg para Aritmeticidade).** *Seja  $\Gamma < \text{Isom}(H^m)$  um grupo de Coxeter de posto  $n$  e denote por  $G = (g_{ij})$  para  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  sua matriz de Gram. Seja  $\tilde{K}$  um corpo gerado pelas entradas de  $G$ , e seja  $K(\Gamma)$  um corpo gerado por todos os possíveis ciclos de  $G$ . Então  $\Gamma$  é quasi-aritmético se e somente se*

*i)  $\tilde{K}$  é totalmente real;*

*ii) para qualquer imersão  $\sigma : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}$  que não é a identidade em  $K(\Gamma)$ , a matriz  $G^\sigma$ , obtida por aplicar  $\sigma$  a todos os elementos da matriz  $G$ , é positiva semidefinida.*

*Além disso, o grupo quasi-aritmético  $\Gamma$  é aritmético se e somente se*

*iii) os ciclos de  $2G$  são inteiros algébricos em  $K(\Gamma)$ . Em ambos os casos  $\Gamma$  é definida sobre  $K(\Gamma)$ .*

Com o critério anterior, vamos checar se os grupos trabalhados no [exemplo 4](#) são aritméticos ou não:

Vamos checar o item *ii*) do teorema para  $q = 4$

$$G_4 = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -2\sqrt{10+7\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -\sqrt{2(2+\sqrt{2})} & -2(2+\sqrt{2}) \\ 0 & -1 & -1 & -\sqrt{2(2+\sqrt{2})} & 2 & 0 \\ -2\sqrt{10+7\sqrt{2}} & 0 & 0 & -2(2+\sqrt{2}) & 0 & 2 \end{array} \end{pmatrix}$$

Decompondo  $G_4$  em 4 quadrantes  $3 \times 3$ . Tome  $G_4^i$  como a matriz que contém o quadrante  $Q_i$  e substitua todos os outros quadrantes por quadrantes nulos. Vamos provar que  $\sigma(G_4)$  é uma matriz positiva semidefinida, e assim  $G_4$  é dada como soma de matrizes positivas semidefinidas  $\sigma(G_4^i)$ .

$$G_4^1 = \begin{pmatrix} Q_1_{3 \times 3} & Q_2_{3 \times 3} \\ Q_3_{3 \times 3} & Q_4_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

Utilizaremos o critério que analisa todos os principais determinantes (determinante excluindo linhas e colunas de mesmo índice da matriz) e concluímos que se todos esses determinantes são não negativos, a matriz é semidefinida positiva [Zha99]. É fácil ver que  $G_4^2$  e  $G_4^3$  têm todos os principais determinantes nulos. Assim olharemos apenas para  $\sigma$  agindo em  $G_4^1$  e  $G_4^4$ . Analisando as possibilidades em que  $\sigma$  realmente altera o determinante, temos apenas:

$$\sigma_1 \text{ definida por: } \sqrt{2} \rightarrow -\sqrt{2};$$

$$\sigma_2 \text{ definida por: } \sqrt{2} \rightarrow -\sqrt{2} \text{ e } \sqrt{2-\sqrt{2}} \rightarrow -\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$G_4^1 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{matrix} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_i(G_4^1) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{matrix} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

$$G_4^4 = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \begin{matrix} 0 & -\sqrt{2(2+\sqrt{2})} & -2(2+\sqrt{2}) \\ -\sqrt{2(2+\sqrt{2})} & 2 & 0 \\ -2(2+\sqrt{2}) & 0 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_i(G_4^4) = \left( \begin{array}{cc} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2(2-\sqrt{2})} & -2(2-\sqrt{2}) \\ -\sqrt{2(2-\sqrt{2})} & 2 & 0 \\ -2(2-\sqrt{2}) & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2(2-\sqrt{2})} & -2(2-\sqrt{2}) \\ -\sqrt{2(2-\sqrt{2})} & 2 & 0 \\ -2(2-\sqrt{2}) & 0 & 2 \end{pmatrix} = 36\sqrt{2} - 48 > 0$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2(2-\sqrt{2})} \\ -\sqrt{2(2-\sqrt{2})} & 2 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} > 0$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & -2(2-\sqrt{2}) \\ -2(2-\sqrt{2}) & 2 \end{pmatrix} = 16\sqrt{2} - 20 > 0$$

Com isso e as observações feitas no exemplo temos que para  $q = 4$  o grupo é aritmético.

O caso  $q = 6$  não é sequer quasi-aritmético uma vez que  $G$  possui entradas que não são totalmente reais.

$$G_6 = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & 0 & a_{1,6} \\ -\sqrt{3} & 2 & -\sqrt{3} & 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 2 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -\sqrt{2(1+\sqrt{3})} & a_{4,6} \\ 0 & -1 & -1 & -\sqrt{2(1+\sqrt{3})} & 2 & 0 \\ -2\sqrt{\frac{2}{11}(31+18\sqrt{3})} & 0 & 0 & a_{6,4} & 0 & 2 \end{array} \end{pmatrix}$$

$$a_{1,6} = -2\sqrt{\frac{2}{11}(31+18\sqrt{3})}$$

$$a_{4,6} = a_{6,4} = -\sqrt{\frac{12}{11}(7+3\sqrt{3})}$$

**Observação 2.** Com o intuito de verificar se um poliedro é não aritmético podemos analisar uma matriz principal  $S$  da sua matriz de Gram  $G$ . Como para que uma matriz seja positiva semidefinida é necessário e suficiente que todos os seus determinantes principais sejam não negativos, pelo item (ii) do critério de Vinberg se encontramos uma  $\sigma : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}$  que não é a identidade em  $K(\Gamma)$  e a matriz  $S^\sigma$  não é positiva semidefinida então o poliedro  $P$  não é aritmético. Assim sendo, se  $S$  tem determinante negativo e  $\sigma$  não muda o sinal do seu determinante temos que o poliedro é não aritmético. Veja o exemplo abaixo.

Para encontrar um poliedro não aritmético do tipo C (veja Seção 3.1), podemos analisar quando  $Q_q^1$   $_{3 \times 3}$ , o primeiro quadrante  $3 \times 3$  de sua matriz de Gram, tem determinante negativo e procurar por  $\sigma$  que não altera o sinal desse determinante.

$$Q_q^1 = \begin{pmatrix} 2 & -x & -x \\ -x & 2 & -x \\ -x & -x & 2 \end{pmatrix} \quad \text{onde } x = 2 \cos \frac{\pi}{q}$$

Temos  $\text{Det}(Q_q^1) = -2x^3 - 6x^2 + 8$  que é negativo para  $x > 1$ . Como  $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n}) \subset \tilde{k}$  podemos olhar para os automorfismos de  $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n})$ . Estes são definidos por  $\xi^m(\cos \frac{2\pi}{n}) = \cos \frac{2m\pi}{n}$  com  $\text{mdc}(m, n) = 1$ .

Assim, olharemos para valores de  $q$  tais que existe  $m$  para o qual o sinal do determinante de  $Q_q^1$  para  $x = 2 \cos \frac{2m\pi}{2q}$  não se altera, ou seja  $\cos \frac{\pi}{q} > \frac{1}{2}$ . Com isso precisamos de

$$\frac{m2\pi}{2q} < \frac{\pi}{3}; \quad \text{então} \quad 4m \leq q.$$

Deste modo, para  $n = 2^k$  temos  $q = 2^{k-1}$  e  $4m \leq 2^{k-1}$ . Neste caso podemos tomar  $m = 2^{k-3} - 1$ . Podemos escolher também  $n = 2q$  para  $q \geq 13$  primo e tomar  $m = 3$ . Com estas duas possíveis condições apresentadas, temos uma família infinita de poliedros tais que nenhum deles satisfaz o item (ii) do critério de Vinberg, ou seja, não são aritméticos.

De forma ainda mais geral,  $m = 3$  serve sempre que  $q > 13$  e  $q$  não é múltiplo de 3.

Observe que o critério que acabamos de mencionar serve para verificar se um poliedro possuindo 3 faces adjacentes não disjuntas de mesmo ângulo é não aritmético. Portanto podemos enunciar o seguinte corolário do critério de Vinberg:

**Critério de não aritmeticidade.** *Seja  $P$  um poliedro com 3 faces adjacentes que todas não se intersectam simultaneamente mas se intersectam duas a duas formando o mesmo ângulo diedral  $\frac{\pi}{q}$ , teremos que, se  $q > 13$  e  $q$  não é divisível por 3 então  $P$  não é aritmético.*

# 3

## Poliedros e colagens

### 3.1 Poliedros básicos

Trabalharemos com três tipos de poliedro, cada um contendo um 3-circuito (três faces adjacentes duas a duas) cujos ângulos diedrais são todos iguais e da forma  $\frac{\pi}{q}$  como na Figura 3.1. Estes três tipos de poliedro são especiais, visto que todos se colam entre si pela face  $F_4$  e o definido em  $B$  ainda possibilita a colagem dele com um copia dele mesmo pela face  $F_6$ . Aproveitando a variedade de poliedros que podemos construir, analisaremos características destes poliedros e de colagens entre poliedros destes três tipos.

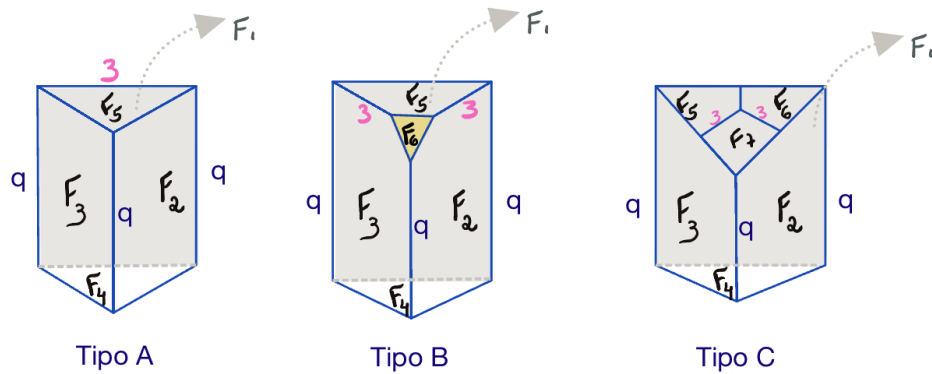


Figura 3.1: Três tipos de poliedro  
(a face cinza representa a face  $F_1$  por trás das faces  $F_3$  e  $F_2$ ).



Como estamos interessados em poliedros de volume finito em  $\mathbb{H}^3$ , precisamos avaliar os valores de  $q$  que possibilitam esta condição. Pelo teorema de Andreev (veja Seção 1.2), temos as seguintes condições de existência para um poliedro com um 3-circuito de volume finito:

- (a) Se 3 planos se encontram em um vértice  $v$ , a soma dos 3 ângulos diedrais que se encontram em  $v$  é maior ou igual a  $\pi$ .
- (b) Em um 3-circuito a soma dos 3 ângulos diedrais entre as faces não excede  $\pi$ .

Dessa forma, para os tipos A, B e C temos que

$$\frac{3\pi}{q} < \pi \text{ pela condição (b),}$$

portanto  $q > 3$ .

E para A e B temos

$$\frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \geq \pi \text{ pela condição (a),}$$

portanto  $q \leq 6$ .

Para o tipo C, temos que para todo  $q > 3$  o poliedro é compacto.

### 3.2 Sequências de colagens e mutações

**Definição 6 (Grafo de colagem).** Sejam  $T_p$  e  $T_q$  dois poliedros do tipo  $A$ ,  $B$  ou  $C$ . Denotaremos por

$$\begin{array}{c} F \\ \hline T_q \quad T_q \end{array}$$

a colagem de  $T_q$  e  $T_p$  ao longo da face  $F$ . E quando quisermos denotar uma rotação pela face de colagem  $F$ , quando for possível fazê-la, representaremos a face por  $F^\circ$  ao invés de  $F$ .

**Definição 7 (Mutação).** Sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois poliedros colados pelas faces triangulares  $F_1$  e  $F_2$ , cujos os ângulos diedrais dados pelas arestas do poliedro que não estão em  $F_1$  e  $F_2$  e que interceptam os v rtices dessas faces tem mesmo valor. Suponha que os ângulos diedrais associados as arestas das faces são  $\frac{\pi}{2}$ . Nesta colagem podemos enumerar o vértice de cada face como  $v_1^i$  de  $F_1$  e  $v_2^i$  de  $F_2$  supondo que estão identificados pelo mesmo  ndice  $i$ . Uma muta o nesta colagem   identificar as faces de forma que os v rtices identificados agora sejam  $v_1^i$  com  $v_2^{i+1}$ . A muta o pode ser interpretada também como uma rota o na face de colagem descrita acima.

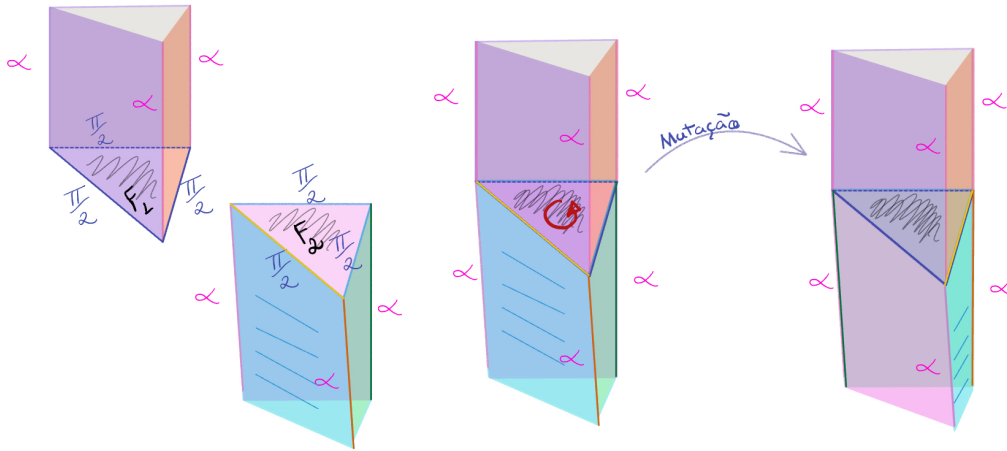
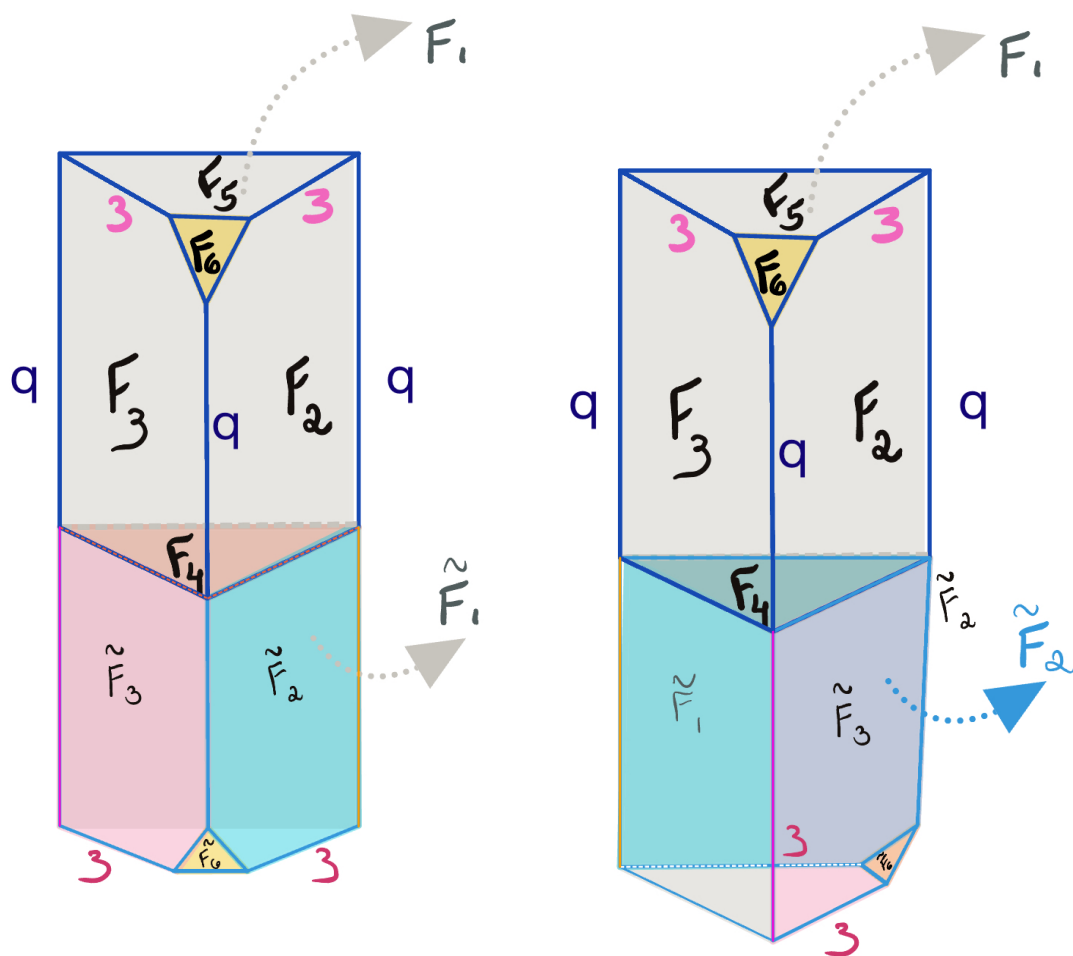


Figura 3.2: Muta o na colagem de dois poliedros

Se um poliedro  $P$    dado pela colagem de dois poliedros  $P_1$  e  $P_2$  como descrito acima, chamamos o poliedro resultante após a muta o realizada na colagem de *poliedro mutante* de  $P$  e denotamos esse novo poliedro por  $P^M$ .

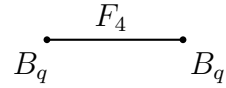


(a) Colagem de  $B_q$  with  $B_q$  ao longo de  $F_4$

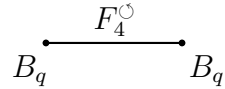
(b) colagem (a) rotacionada

Figura 3.3

**Exemplo 5.** Podemos colar  $B_q$  e uma copia de  $B_q$  ao longo de uma face  $F_4$  como na Figura 3.3a e seu grafo será da seguinte forma:



Podemos também rotacionar esta colagem ao longo de  $F_4$  como na Figura 3.3b e seu grafo de colagem será da forma:



Note que quando colamos ao longo de uma face onde todos os ângulos diedrais são  $\frac{\pi}{2}$  as faces adjacentes a face de colagem de ambos os poliedros se prolongam e se tornam uma única face. Neste exemplo, denotamos por  $\tilde{F}_i$  as faces da copia do poliedro, mas quando as faces são prolongadas poderíamos ter denotado por uma única face, chamando-a, por exemplo, de  $F_i\tilde{F}_i$ . Esta escolha foi feita propositalmente para melhor visualização da colagem nas ilustrações.

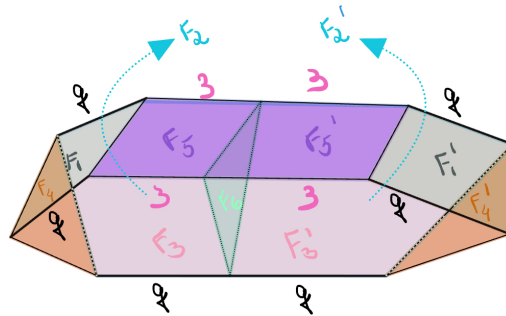
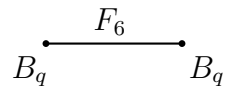


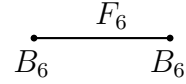
Figura 3.4: Colagem de  $B_q$  com  $B_q$  ao longo de  $F_6$

**Exemplo 6.** Podemos colar  $B_q$  e outra copia de  $B_q$  ao longo da face  $F_6$  como na Figura 3.4 e nosso grafo de colagem sera no seguinte formato:

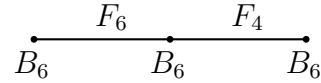


**Observação 3.** Quando colamos  $B_6$  com sua cópia ao longo de  $F_6$ , a constante  $c_{4,5}$  de sua matriz de Gram (veja o Exemplo 4) não muda, uma vez que as relações existentes entre as faces  $F_1, F_2, F_3, F_4$  e  $F_5$  são as mesmas. Além disso o polinômio mínimo de  $c_{4,5}$  possui raízes que não são reais, assim  $\tilde{K}$  não é um corpo totalmente real.

Assim, se colamos duas cópias de  $B_6$  ao longo de  $F_6$ :



e adicionamos outra cópia de  $B_6$  ao longo de  $F_4$ :



de acordo com a observação anterior e o item (i) do critério de Vinberg, este novo poliedro não é aritmético. De fato, nenhum poliedro gerado pela colagem de  $B_6$  que preserve as relações entre as primeiras 5 faces de  $B_6$  será aritmético.

# 4

## Comensurabilidade colagem e mutações

---

### 4.1 Colagem de dois poliedros e suas mutações

Quando efetuamos a colagem de dois poliedros do tipo básico ao longo da face  $F_4$  criamos um novo poliedro  $P$ . Neste poliedro  $P$  podemos realizar uma mutação ao longo de  $F_4$  gerando assim o poliedro que chamamos de “par mutante” do poliedro  $P$ . Podemos nos perguntar então o que estes poliedros têm em comum e se o par mutante do poliedro  $P$  é comensurável a  $P$ . Existem propriedades que são invariantes por comensurabilidade, uma delas, por exemplo, é ter “traço integral”(veja [GR19]). Em muitas das combinações de dois poliedros básicos, temos que tanto o poliedro quando o seu par mutante não podem ser diferenciados por tais propriedades. Para distinguir se dois poliedros são não comensuráveis precisamos encontrar um invariante por comensurabilidade que se altere com a mutação. A ideia ao longo desse capítulo é construir uma *decomposição máxima* do poliedro que seja um invariante por comensurabilidade.

**Definição 8.** *Um poliedro  $P$  admite uma decomposição de Coxeter se  $P$  pode ser subdividido em finitos poliedros de Coxeter, de forma que quaisquer dois sub-poliedros que possuem uma face em comum são obtidos um através do outro como reflexão em relação a esta face.*

Observe que quaisquer dois sub-poliedros de uma decomposição de Coxeter são isométricos.

De acordo com [Fel04] os prismas de base triangular só podem se decompor em poliedros fundamentais se estes forem prismas também de base triangular ou tetraedros. De fato, toda possível decomposição de Coxeter de prismas de base triangular por prismas de base triangular se realiza como na Figura 4.1, que representa os 5 tipos de decomposição possíveis [loc. cit., Teorema 1].

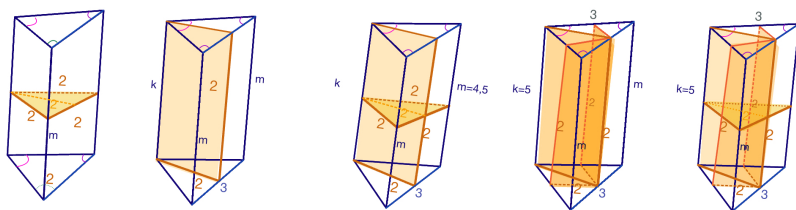


Figura 4.1: Decomposições possíveis de um poliedro de base triangular em poliedros de base triangular

**Definição 9.** *Uma decomposição de Coxeter é chamada maximal se ela não admite nenhuma subdecomposição de Coxeter. Os poliedros que realizam essa decomposição serão chamados de maximais.*

O teorema a seguir é um notável resultado de Margulis [Mar91]. Esse resultado nos garante a estrutura de reticulado do comensurador de um grupo não aritmético e nos permite aplicar o lema de Vinberg descrito a seguir para o comensurador de um grupo.

**Teorema 4 (Margulis).** *Um reticulado  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  é aritmético se e somente se seu comensurador  $\text{Com}(\Gamma)$  em  $G$  é não-discreto.*

É importante lembrar que grupos de reflexão maximais não necessariamente podem ser vistos como reticulados maximais. No contexto do teorema abaixo, quando o poliedro  $P$  é domínio fundamental sem simetrias, temos que o reticulado  $\Gamma$  é um reticulado maximal, ou seja, qualquer outro reticulado que contém  $\Gamma$  é igual ao próprio  $\Gamma$ . Então, no caso não aritmético, o **Lema 1** implica que  $\Gamma$  é igual ao seu comensurador.

**Lema 1 (Vinberg).** *Seja  $\Gamma = \Gamma(P)$  um subgrupo de reflexões maximal do reticulado  $\Gamma_0 < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Temos que  $\Gamma$  é um subgrupo normal de  $\Gamma_0$ . Além disso existe um subgrupo  $\Theta < \Gamma_0$  tal que  $\Theta \rightarrow \Gamma_0/\Gamma$  é um isomorfismo e  $\Theta$  é o grupo de simetrias do poliedro de Coxeter  $P$ .*

**Demonstração.** Como o conjunto de reflexões em  $\Gamma_0$  é invariante por conjugação, temos que o subgrupo de  $\Gamma_0$  gerado por reflexões em  $\Gamma_0$  é normal em  $\Gamma_0$ .

Seja  $P$  domínio fundamental de  $\Gamma$ . Suponha que existe  $\gamma_0 \in \Gamma_0$  tal que  $\text{Int}(P) \cap \gamma_0(\text{Int}(P)) \neq \emptyset$  e  $\gamma_0(P) \neq P$ . Então existe um plano geodésico  $V$  contendo uma face de  $P$  tal que  $\gamma_0(V) \cap \text{Int}(P) \neq \emptyset$ . Considere  $r_V \in \Gamma$  a reflexão no plano  $V$ , essa reflexão é conjugada a reflexão  $r_{\gamma(V)} = \gamma r_V \gamma_0^{-1}$  que não está em  $\Gamma$  pois  $r_{\gamma(V)}(\text{Int}(P)) \cap \text{Int}(P) \neq \emptyset$  e  $P$  domínio fundamental de  $\Gamma$ . Entretanto  $\Gamma \trianglelefteq \Gamma_0$  implica que  $r_{\gamma(V)} \in \Gamma$ , temos então uma contradição.

Seja  $\Theta$  um subgrupo de  $\Gamma_0$  tal que  $\Theta(P) = P$ . O grupo  $\Theta$  é finito pois  $P$  tem

volume finito e tem finitas faces.

Considere a composição  $\Theta \hookrightarrow \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0/\Gamma$  temos que  $\Gamma \cap \Theta$  é trivial pois  $P$  domínio fundamental para  $\Gamma$  assim temos que a composição é injetiva. Para comprovar sobrejetividade; tome  $\gamma_0 \in \Gamma_0$  encontre  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma_0^{-1}(\text{Int}(P)) \cap \gamma(\text{Int}(P)) \neq \emptyset$ . Então  $\gamma_0\gamma(P) = P$  logo  $\gamma_0\gamma = \theta \in \Theta$ . Com isso  $\gamma_0\Gamma = \theta\Gamma$  então o mapa composição é sobrejetivo. ■

*Note que, embora Vinberg tenha assumido no enunciado original que  $\Gamma$  aritmético, por se tratar de um lema que seria utilizado em tais condições, não é necessário assumir  $\Gamma$  aritmético para o lema em questão.*

Sejam  $P$  e  $P^M$  dois poliedros de Coxeter, e respectivamente  $\tilde{P}$  e  $\tilde{P}^M$  seus sub poliedros maximais. A partir do lema anterior podemos desenvolver um critério para verificar se  $\Gamma(P)$  e  $\Gamma(P^M)$  são isomorfos, para o caso onde  $\Gamma(\tilde{P})$  e  $\Gamma(\tilde{P}^M)$  são subgrupos não aritméticos e maximais de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ .

**Proposição 2.** *Sejam  $\Gamma(\tilde{P})$  e  $\Gamma(\tilde{P}^M)$  não aritméticos. Basta que tanto  $\tilde{P}$  quanto  $\tilde{P}^M$  não tenham nenhuma simetria e tenham volumes distintos para que  $\Gamma(P)$  e  $\Gamma(P^M)$  sejam não comensuráveis.*

**Demonstração.** De fato,  $\tilde{P}$  é poliedro maximal, com isso seu grupo de Coxeter  $\Gamma(\tilde{P})$  é um grupo de reflexões maximal. Isto significa que não existe um grupo de reflexões discreto contendo  $\Gamma(\tilde{P})$ . O mesmo se aplica para  $\tilde{P}^M$ . Assim podemos aplicar o Lema de Vinberg para concluir que  $\Gamma(\tilde{P})$  e  $\Gamma(\tilde{P}^M)$  são reticulados maximais.

Pelo teorema de Margulis, nesse caso, o comensurador é o único reticulado maximal e temos que

$$\Gamma(\tilde{P}^M) = \text{Com}(P^M) \text{ e } \Gamma(\tilde{P}) = \text{Com}(P).$$

Assim, se os poliedros maximais  $\tilde{P}$  e  $\tilde{P}^M$  tem volumes distintos, seu comensuradores também diferem. De fato, se os comensuradores fossem isomorfos, teríamos  $\Gamma(\tilde{P}^M) = \Gamma(\tilde{P})$  e pelo teorema de Mostow-Prasad de rigidez (veja Teorema 5), o volume dos poliedros fundamentais seria o mesmo. Para concluir, basta lembrar que grupos com comensuradores diferentes são não comensuráveis, como provado a seguir. ■



**Proposição 3.** *Se  $\Gamma_1 \underset{if}{<} \Gamma_2$ , então  $\text{Com}(\Gamma_1) = \text{Com}(\Gamma_2)$ .*

**Demonstração.** Seja  $C_i = \text{Com}(\Gamma_i) = \{g \in G; g\Gamma_i g^{-1} \cap \Gamma_i \text{ tem índice finito em } \Gamma_i \text{ e } g\Gamma_i g^{-1}\}$ . Tome  $g \in C_2$  então  $\Gamma_2 \underset{if}{>} g\Gamma_2 g^{-1} \cap \Gamma_2$  e  $g\Gamma_2 g^{-1} \underset{if}{>} g\Gamma_1 g^{-1}$  pois  $\Gamma_1 \underset{if}{<} \Gamma_2$  portanto  $\Gamma_2 \underset{if}{>} g\Gamma_2 g^{-1} \cap \Gamma_2 \underset{if}{>} g\Gamma_1 g^{-1} \cap \Gamma_2$  e portanto  $\Gamma_2$  comensurável a  $g\Gamma_1 g^{-1}$  e por transitividade temos  $g\Gamma_1 g^{-1}$  comensurável com  $\Gamma_1$ .

Tome  $g \in C_1$  então  $\Gamma_2 \underset{if}{>} \Gamma_1 \underset{if}{>} g\Gamma_1 g^{-1} \cap \Gamma_1$ , portanto  $\Gamma_2 \underset{if}{>} g\Gamma_1 g^{-1} \cap \Gamma_1$  e assim  $\Gamma_2$  comensurável a  $g\Gamma_1 g^{-1} \cap \Gamma_1$ . Também temos que  $g\Gamma_2 g^{-1} \underset{if}{>} g\Gamma_1 g^{-1} \underset{if}{>} g\Gamma_1 g^{-1} \cap \Gamma_1$  e portanto  $g\Gamma_2 g^{-1}$  comensurável a  $g\Gamma_1 g^{-1} \cap \Gamma_1$  e por transitividade temos  $g\Gamma_2 g^{-1}$  comensurável com  $\Gamma_2$ . ■

**Teorema 5 (Rigidez de Mostow-Prasad).** *Se  $M$  variedade de dimensão  $n \geq 3$  de curvatura negativa constante e volume finito então o grupo fundamental  $\pi_1(M)$  determina  $M$  a menos de isometria.*

Em outras palavras, duas variedades nas condições acima são dadas por quocientes do seu espaço de recobrimento por grupos isomorfos se somente se estas variedades são isométricas. De fato, iremos utilizar a forma algébrica do teorema de Mostow-Prasad, assim sendo, como reticulados conjugados têm o mesmo volume, este também se aplica para orbifolds de forma similar ao teorema para variedades. A saber, o enunciado no contexto algébrico se dá por :

**Teorema 6.** *Seja  $n \geq 3$  e sejam  $\Gamma$  e  $\tilde{\Gamma}$  dois reticulados em  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Suponha que existe um isomorfismo de grupo  $f : \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$ . Então  $\Gamma$  e  $\tilde{\Gamma}$  são conjugados. Ou seja, existe  $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  tal que  $\Gamma = g\tilde{\Gamma}g^{-1}$ .*

**Observação 4.** *É possível generalizar a Proposição 2 para o caso em que uma das decomposições maximais, por exemplo a de  $P^M$ , tenha uma simetria que não seja de reflexão. Nessa caso, utilizamos a maximalidade do grupo gerado por reflexões dos poliedros  $\tilde{P}$  e  $\tilde{P}^M$  e como temos:*

$$\Gamma(\tilde{P}^M) < \text{Com}(\tilde{P}^M) = \text{Com}(P^M) \text{ e } \Gamma(\tilde{P}) = \text{Com}(P);$$

*se os poliedros fossem comensuráveis teríamos :*

$$\Gamma(\tilde{P}) > \Gamma(\tilde{P}^M).$$

Portanto, pela maximalidade de  $\Gamma(\tilde{P}^M)$  como grupo de reflexão,  $\Gamma(\tilde{P})$  e  $\Gamma(\tilde{P}^M)$  teriam que ser isomorfos e o mesmo resultado da proposição segue.

De forma mais geral podemos escrever o seguinte teorema de rigidez.

**Teorema 7.** *Seja  $\tilde{P}$  poliedro não aritmético e sem simetria dado pela decomposição maximal. Temos que  $\Gamma(P)$  e  $\Gamma(P^M)$  são comensuráveis, então  $\tilde{P}$  e  $\tilde{P}^M$  tem o mesmo volume.*

Para generalizar a construção do invariante por comensurabilidade construído, para poliedros em geral (não necessariamente de base triangular), é preciso estudar possíveis decomposições por reflexões de poliedros e avaliar se estas são maximais.

Já existe alguma teoria sobre decomposição de um poliedro geral com  $k$  faces. Como provado em [FT04], se  $P$  é um poliedro hiperbólico com  $k$  faces temos que  $P$  admite uma decomposição por poliedros fundamentais com no máximo  $k$  faces. Além disso, pela definição da decomposição, temos que esses poliedros fundamentais são todos congruentes.

## 4.2 Um exemplo de Gyurek e Roeder

Usando nosso método da Seção 4.1 podemos investigar exemplos do trabalho [GR19]. Em particular, o exemplo abaixo que foi deixado em aberto:

“Os poliedros  $AA5$  e  $AA5M$  são comensuráveis?”

Primeiramente gostaríamos de observar que, utilizando contas similares às realizadas no Exemplo 4 temos que os termos  $a_{4,5}$  e  $a_{4,5_m}$ , referentes a relações entre as faces de número 4 e 5 de  $AA5$  e  $AA5M$  respectivamente, são:

$$a_{4,5} = -\frac{3}{10}(5 + \sqrt{5})$$

$$a_{4,5_m} = \frac{1}{40}(-3(5 + \sqrt{5}) - \sqrt{4590 + 1210\sqrt{5}})$$

e pelo o critério de Vinberg (veja Teorema 3 item *iii*) o grupo definido pelos ciclos de  $2G$  possui elemento que não é inteiro algébrico. Portanto, temos que  $\Gamma(AA5)$  e  $\Gamma(AA5M)$  não são aritméticos.

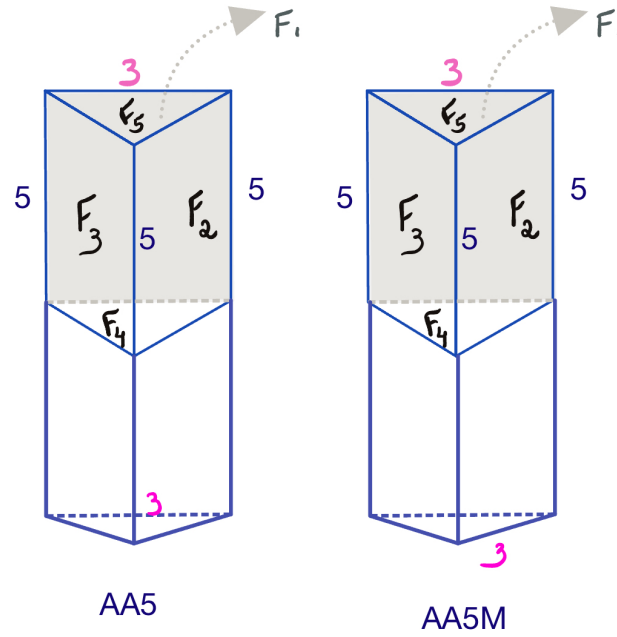


Figura 4.2: Poliedro AA5 e seu poliedro mutante AA5M

**Proposição 4.** *Seja AA5 o poliedro da Figura 4.2 e AA5M o seu par mutante.*

- a) *AA5 se decompõe pela decomposição tipo 3.*
- b) *AA5M não se decompõe por prismas de base triangular nem por tetraedros.*

**Demonstração.** AA5 tem decomposição como tipo 1 e 2. Note que é possível decompor como no caso 3, pois seus ângulos diedrais respeitam as condições para essa decomposição. Como AA5 só possui um ângulo diedral igual a  $\frac{\pi}{3}$  em sua base, temos que ele não se decompõe como na decomposição tipo 4, uma vez que nessa decomposição os espelhos existentes garantem que o ângulo diedral  $\frac{\pi}{3}$  se repete na base e o mesmo ocorre para decomposição do tipo 5.

Claramente, AA5M não possui simetria para se decompor como prisma de base triangular. Além disso, segundo a tabela completa de decomposições por tetraedros disponível em [Fel04] AA5M não se decompõe por tetraedros. ■

Portanto, respondendo um dos casos em aberto disponíveis em [GR19] temos que:

**Corolário 7.1.** *O poliedro  $AA5$  não é comensurável com  $AA5M$ .*

**Demonstração.** O poliedro fundamental de  $AA5$  não tem nenhuma simetria de reflexão. Se o poliedro tivesse uma simetria de reflexão, ou o espelho da simetria cortaria um ângulo diedral e ambas as faces triangulares ou cortaria todas as três faces quadrangulares adjacentes entre si. Em ambas as opções o espelho precisa que os ângulos diedrais de um lado sejam iguais aos que serão espelhados para o outro, o que não ocorre, pois como na Figura 4.1, os ângulos diedrais de uma das faces triangulares são  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$  da outra são  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Portanto temos uma decomposição maximal para  $AA5$ .

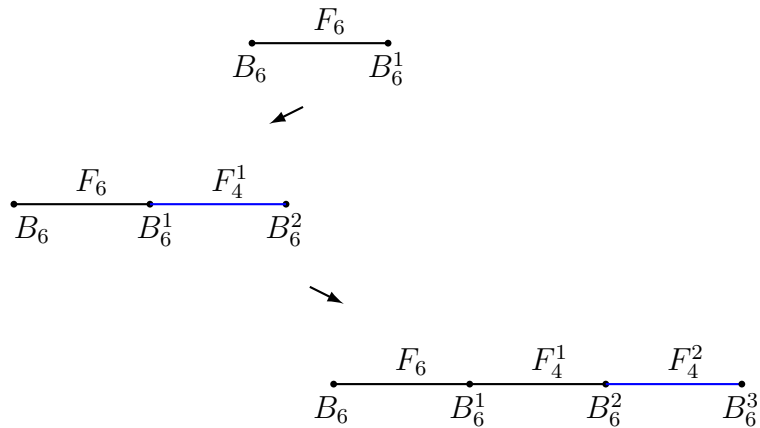
Além disso,  $AA5M$  não tem nenhuma decomposição por poliedros fundamentais. Dessa forma, como  $AA5$  e  $AA5M$  têm o mesmo volume e como o poliedro dado pela decomposição maximal de  $AA5$  tem volume menor do que o de  $AA5$ , pela construção da seção anterior temos que  $AA5$  e  $AA5M$  não são comensuráveis. ■

### 4.3 Sequência de colagem de poliedros

Quando colamos poliedros de forma sucessiva, geramos uma sequência de poliedros que pode facilmente ser representada pelo grafo definido anteriormente. Olhando para uma sequência de colagens podemos nos perguntar se o poliedro criado possui alguma simetria, se seu grafo de colagem possui alguma simetria e após uma mutação na colagem quais as alterações ocorrem em seu grafo de Coxeter.

Começando por um poliedro do tipo  $B_q$  podemos colar uma cópia de  $B_q$  pela face  $F_4$  ou  $F_6$  (como nos Exemplos 5 e 6), dessa forma obtemos um novo poliedro, onde face escolhida para colagem passa a fazer parte do seu interior e as três faces adjacentes a ela passam a ser um prolongamento das faces do poliedro inicial pelas faces de mesmo número da cópia de  $B_q$ . Dessa forma podemos ver que após a primeira colagem teremos  $6 + (6 - 3 - 2) = 7$  faces para o nosso novo poliedro. É possível continuar o processo de colagem sempre anexando uma cópia de  $B_q$  ao poliedro resultante de uma colagem anterior. Assim sendo, podemos dizer que se colarmos  $n$  cópias de  $B_q$  sucessivamente ao poliedro  $B_q$  teremos um poliedro com  $6 + n$  faces.

**Observação 5.** *Começando por  $B_q$  podemos sempre escolher  $F_4$  ou  $F_6$ , uma vez escolhida a face  $F_4$  o processo continua se escolhemos na sequência a face  $F_6$  e vice versa. Note que, a cada passo da colagem, podemos escolher uma em duas faces disponíveis para realizar a colagem, uma face do poliedro que acabamos de colar ou outra face disponível do poliedro anterior, mas uma vez escolhida a sequência de colagem esta poderia ser reinterpretada partindo de um poliedro e prosseguindo com a colagem sempre em um sentido, ou seja na face disponível do último poliedro anexado.*



Como no grafo acima, podemos denotar o processo onde cada colagem só ocorre na última cópia de  $B_q$  que acabamos de colar, tomando como referência a face disponível no último poliedro colado e denotando-a com o número do poliedro no qual se encontra.

Note que também é possível fazer mutações ao longo da sequência de colagem. Isso nos permite gerar uma grande variedade de poliedros distintos a partir de um bloco do tipo  $B_q$ .

#### 4.4 Simetrias em uma sequência de poliedros

Vimos que as simetrias de poliedros tem papel fundamental no estudo de comensurabilidade e colagens. Reflexões em relação a um plano são isometrias de  $\mathbb{H}^3$ , desse ponto de vista, podemos explorar a existência de possíveis planos de simetria de um dado poliedro em  $\mathbb{H}^3$ . Vamos agora estudar simetrias de uma sequência de colagens. Lembrando que, uma simetria em um poliedro é uma isometria que leva o poliedro nele mesmo. Nesta seção iremos nos ater a simetrias como reflexão do poliedro por um plano que o parte em dois poliedros idênticos. É importante lembrar que uma simetria leva faces congruentes em faces congruentes e portanto se uma face não é congruente a nenhuma outra esta é partida de forma simétrica pelo plano de reflexão e é levada em si mesma.

**Observação 6.** Para melhor descrever o processo de colagem, denotaremos por  $F_i^n$  a face  $F_i$  da  $n$ -ésima copia de  $B_q$ . Denotaremos por  $FF_i^n$  a nova face gerada pelo prolongamento de uma face  $F$  após  $n$  colagens com  $F_i$  como face adjacente a face de colagem

**Exemplo 7.** O poliedro dado pela colagem

$$\begin{array}{c} \text{-----} F_6 \text{-----} \\ \bullet \qquad \qquad \bullet \\ B_6 \qquad \qquad B_6^1 \end{array}$$

possui uma simetria por reflexão no plano  $F_6$ , uma vez que podemos visualizar a colagem de  $B_q$  com sua copia por  $F_6$  como uma reflexão (veja a Figura 3.4). Com esta colagem temos que as faces  $F_1$  e  $F_4$  são preservadas, são adicionadas  $F_1^1$  e  $F_4^1$  e são prolongadas  $F_2$ ,  $F_3$  e  $F_5$  (denotamos respectivamente por  $F_2F_2^1$ ,  $F_3F_3^1$  e  $F_5F_5^1$ ).

**Exemplo 8.** O poliedro dado pela colagem

$$\begin{array}{c} \text{-----} F_6 \text{-----} F_4^1 \text{-----} \\ \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ B_6 \qquad B_6^1 \qquad B_6^2 \end{array}$$

tem as faces  $F_1$  e  $F_4$  preservadas, são adicionadas  $F_6^2$ ,  $F_5^2$  e são prolongadas  $F_1^1$ ,  $F_2F_2^1$  e  $F_3F_3^1$  (denotamos respectivamente por  $F_1^1F_1^2$ ,  $F_2F_2^1F_2^2$  e  $F_3F_3^1F_3^2$ ). Neste poliedro, enxergar um possível plano de simetria já não é tão simples quanto no exemplo anterior. Veja a Figura 4.3.

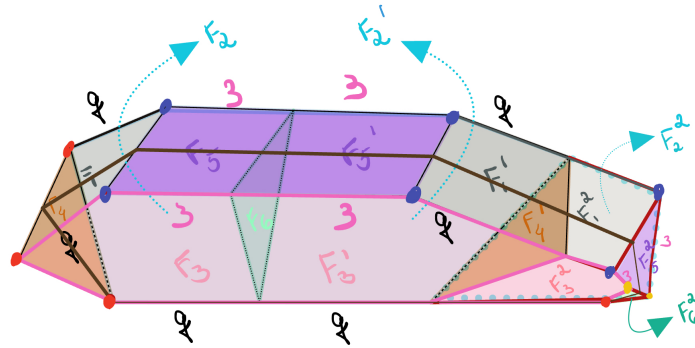


Figura 4.3: Colagem de  $B_q$  com  $B_q$  ao longo de  $F_6$  e  $B_q$  ao longo de  $F_4$

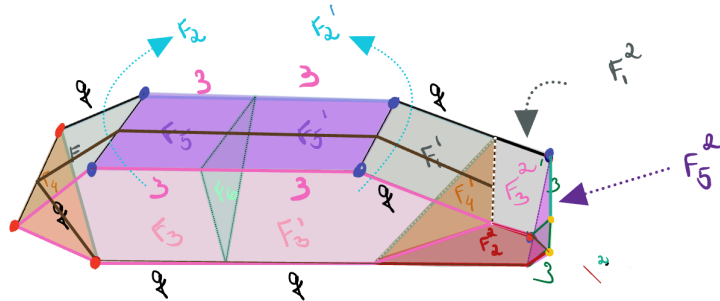
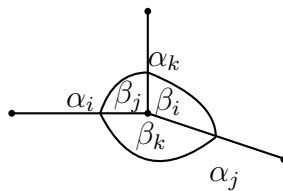


Figura 4.4: Colagem de  $B_q$  com  $B_q$  ao longo de  $F_6$  e  $B_q$  ao longo de  $F_4$  com mutação em  $F_4$

**Proposição 5.** *O ângulo das faces de um poliedro de ângulos agudos está completamente determinado pelos seus ângulos diedrais.*



$$\cos \beta_i = \frac{\cos \alpha_i + \cos \alpha_j \cos \alpha_k}{\sin \alpha_j \sin \alpha_k}$$

Para uma prova da proposição acima veja [RHD07].

**Observação 7.** O poliedro da Figura 4.3 tem apenas duas faces congruentes,  $F_3F_3^1F_3^2$  e  $F_2F_2^1F_2^2$ . Quando realizamos uma mutação pela face  $F_4^1$  esta congruência é destruída e o poliedro passa a ter todas as suas sete faces distintas. Veja a Figura 4.4.

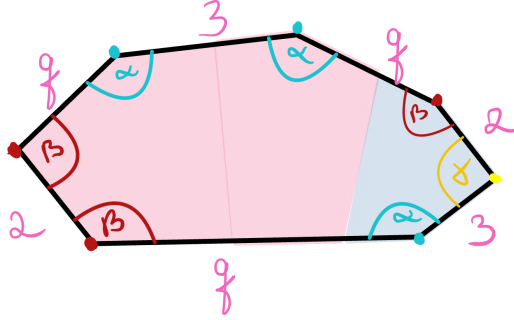


Figura 4.5: Face  $F_3F_3^1F_2^2$

A seguir, vamos definir o conceito de face solitária, que utilizaremos juntamente com as propriedades de simetria de um poliedro para avaliar a existência de possíveis simetrias.

**Definição 10 (Face Solitária).** Uma face solitária é uma face do poliedro que não é congruente a nenhuma outra face.

**Afirmção 1.** O poliedro do Exemplo 8, após a mutação, não possui simetria de reflexão.

Com efeito, se houvesse um plano de simetria, este cortaria perpendicularmente todas as faces solitárias do poliedro, assim sendo, cortaria perpendicularmente a face  $F_3F_3^1F_2^2$  de forma a dividi-la simetricamente. Entretanto esta face não possui nenhuma simetria, visto que ela possui sete ângulos associados a sete vértices, os quais podem ser agrupados em dois grupos de 3 ângulos de mesmo tipo de vértice associado e um ângulo  $\frac{\pi}{2}$ , que sinalizamos como  $\gamma$  e destacamos em amarelo, onde nesta face seu vértice associado é de tipo diferente de todos os outros e os ângulos adjacentes a este ângulo são distintos (veja Figura 4.5).

Nossa afirmação anterior nos leva a elaborar as seguintes proposições:

**Proposição 6.** Para que um poliedro não possua simetria, é suficiente que uma face solitária não tenha simetria.

De forma mais simples, porém não equivalente, podemos dizer também:

**Proposição 7.** Para que um poliedro não possua simetria de reflexão, é suficiente que uma face solitária não tenha simetria de reflexão.



Note que o que estamos analisando é mais do que a simetria da face de forma isolada, estamos analisando a face juntamente com os tipos de vértice que são herdados pela face do poliedro ao qual ela pertence.

No exemplo, pudemos perceber que a simetria do poliedro foi totalmente destruída pela mutação. De fato, a cada 3 copias de  $B_q$  que colamos dessa mesma forma, se realizamos esta mesma mutação, a simetria também será quebrada. A seguir representaremos em duas tabelas, a primeira contendo a progressão das faces a cada colagem e a segunda a propagação da rotação que realizamos no exemplo.

Para deixar claro o que ocorre ao longo do processo de colagem, nas tabelas, destacamos de amarelo as faces que são prolongadas ao longo das colagens; de azul as faces que são adicionadas quando colamos por  $F_4^i$  e de verde quando colamos por  $F_6^i$ . Em cinza representamos a face que “deixa de existir” após a colagem. Observando a Tabela 4.1 podemos analisar o número de arestas de cada face do poliedro facilitando assim o encontro de uma face solitária. Cada vez que duas faces se unem, duas arestas são prolongadas (pois estamos colando faces cujos ângulos diedrais adjacentes são  $\frac{\pi}{2}$ ) e a aresta de colagem passa a ser parte do interior do novo polígono formado pela faces. Sendo assim, se uma face tem  $k$  arestas e outra tem  $s$  arestas temos que a colagem destas duas faces tem  $k + s - 2 - 2$  arestas. Note que se  $s = 4$  o número de arestas não se altera e para  $s = 5$  uma aresta é acrescentada.

Por vermelho, na Tabela 4.2 representamos as faces que sofrem alteração devido a mutação realizada ao longo de  $F_4$ , assim como na Tabela 4.1 destacamos de amarelo as faces que são prolongadas ao longo das colagens. Quando realizamos uma mutação ao longo da face  $F_4$ , acabamos alterando o número de arestas das faces que são prolongadas. Temos que a face  $F_3 F_3^1 F_2^2 F_2^3 \dots F_2^n$  na  $n$ -ésima colagem tem sempre uma aresta a mais que todas as outras, portanto é solitária, uma vez que para que duas faces sejam congruentes elas precisam pelo menos do mesmo número de lados. Assim basta analisar se a face possui ou não possui simetria.

Na Tabela 4.3 descrevemos os ângulos da face solitária que encontramos observando a primeira tabela. É possível observar que para colagens de número par temos assimetria para face solitária, dada a sequência de ângulos e a existência de um único vértice do tipo  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$  ligado a  $\beta$ .

**Observação 8.** *Note que não conseguimos criar uma sequência infinita de poliedros com o poliedro do tipo C, uma vez que as únicas faces possíveis para colagem seriam  $F_2$  e  $F_3$  (que possuem uma aresta em comum) e a cada passo o ângulo diedral entre  $F_2$  e  $F_3^n$  seria acrescido de  $\frac{\pi}{q}$ . Para  $n = q$  teríamos o último passo formando uma face entre  $F_2$  e  $F_3$ .*

	Número de colagens				
	1	2	3	4	5
F a c e s	$F_5 F_5^1$	$F_5 F_5^1$	$F_5 F_5^1$	$F_5 F_5^1$	$F_5 F_5^1$
	$F_3 F_3^1$	$F_3 F_3^1 F_3^2$	$F_3 F_3^1 F_3^2 F_3^3$	$F_3 F_3^1 F_3^2 F_3^3 F_3^4$	$F_3 F_3^1 F_3^2 F_3^3 F_3^4 F_3^5$
	$F_2 F_2^1$	$F_2 F_2^1 F_2^2$	$F_2 F_2^1 F_2^2 F_2^3$	$F_2 F_2^1 F_2^2 F_2^3 F_2^4$	$F_2 F_2^1 F_2^2 F_2^3 F_2^4 F_2^5$
	$F_1$	$F_1$	$F_1$	$F_1$	$F_1$
	$F_4$	$F_4$	$F_4$	$F_4$	$F_4$
	$F_1^1$	$F_1^1 F_1^2$	$F_1^1 F_1^2$	$F_1^1 F_1^2$	$F_1^1 F_1^2$
	$F_4^1$				
		$F_5^2$	$F_5^2 F_5^3$	$F_5^2 F_5^3$	$F_5^2 F_5^3$
		$F_6^2$			
			$F_1^3$	$F_1^3 F_1^4$	$F_1^3 F_1^4$
			$F_4^3$		
				$F_5^4$	$F_5^4 F_5^5$
				$F_6^4$	
					$F_1^5$
					$F_4^5$

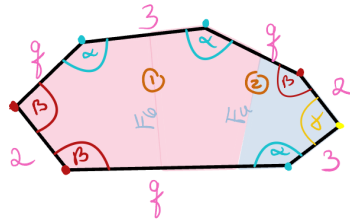
Tabela 4.1: Colagem sucessiva com progressão das faces

		Número de colagens				
		1	⊙ 2	3	4	5
F a c e s	$F_5 F_5^1$	$F_5 F_5^1$	$F_5 F_5^1$	$F_5 F_5^1$	$F_5 F_5^1$	$F_5 F_5^1$
	$F_3 F_3^1$	$F_3 F_3^1 F_2^2$	$F_3 F_3^1 F_2^2 F_2^3$	$F_3 F_3^1 F_2^2 F_2^3 F_2^4$	$F_3 F_3^1 F_2^2 F_2^3 F_2^4 F_2^5$	
	$F_2 F_2^1$	$F_2 F_2^1 F_1^2$	$F_2 F_2^1 F_1^2$	$F_2 F_2^1 F_1^2$	$F_2 F_2^1 F_1^2$	$F_2 F_2^1 F_1^2$
	$F_1$	$F_1$	$F_1$	$F_1$	$F_1$	$F_1$
	$F_4$	$F_4$	$F_4$	$F_4$	$F_4$	$F_4$
	$F_1^1$	$F_1^1 F_3^2$	$F_1^1 F_3^2 F_3^3$	$F_1^1 F_3^2 F_3^3 F_3^4$	$F_1^1 F_3^2 F_3^3 F_3^4 F_3^5$	
	$F_4^1$					
		$F_5^2$	$F_5^2 F_5^3$	$F_5^2 F_5^3$	$F_5^2 F_5^3$	$F_5^2 F_5^3$
		$F_6^2$				
			$F_1^3$	$F_1^3 F_1^4$	$F_1^3 F_1^4$	
			$F_4^3$			
				$F_5^4$	$F_5^4 F_5^5$	
				$F_6^4$		
					$F_1^5$	$F_4^5$

Tabela 4.2: Propagação de uma rotação ao longo das colagens

		Número de colagens				
		1	⊙ 2	3	4	5
Faces	$F_3 F_3^1$	$F_3 F_3^1 F_2^2$	$F_3 F_3^1 F_2^2 F_2^3$	$F_3 F_3^1 F_2^2 F_2^3 F_2^4$	$F_3 F_3^1 F_2^2 F_2^3 F_2^4 F_2^5$	
ângulos	$\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta$	$\alpha\alpha\beta\beta\alpha\beta\beta$	$\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta\beta$	$\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta\beta$	$\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha\beta\beta$	

Tabela 4.3: Ângulos da face alterada pela rotação

Figura 4.6: Face solitária  $\gamma = \beta$ 

A observação acima deixa evidente o quão especial é o poliedro do tipo  $B$ , uma vez que ele nos permite formar uma sequência infinita de colagens gerando um novo poliedro a cada colagem.

## 4.5 Discussão sobre algumas consequências

Ao longo deste trabalho, elaboramos uma forma de verificar se um poliedro contendo um 3-circuito é não aritmético, desenvolvemos um critério que determina quando dois poliedros de base triangular, de mesmo volume e não aritméticos são não comensuráveis, definimos o que chamamos de face solitária, que tem implicações diretas na existência de simetrias por reflexão de um poliedro, e trabalhamos o conceito de mutação de um poliedro.

Nesse sentido, acreditamos que é possível explorar as técnicas aqui apresentadas e o trabalho de Felikson [FT04] e [Fel04] para tentar desenvolver outros critérios para verificar comensurabilidade para poliedros mais gerais.

Como explorado na Seção 4.4, o poliedro após mutação visto não tem nenhuma simetria de reflexão. Para aplicar técnica semelhante a que desenvolvemos na Seção 4.2 precisaríamos verificar se não há outro tipo de decomposição desse poliedro em sub-poliedros congruentes. Com o Teorema 1 do artigo [FT04] sabemos que uma decomposição de um poliedro de volume finito com  $k$  faces tem como poliedro fundamental  $F_P$ , e este tem no máximo  $k$  faces. Além disso, os lemas utilizados no artigo que nos referimos tratam de possíveis posições de planos cortando um poliedro, e provavelmente seriam um bom começo para analisar a possibilidade de decomposição de um poliedro mais geral. Deixamos então algumas questões para serem avaliadas futuramente:

- 1.a. Teria o poliedro dado pela colagem de poliedros do tipo B apresentado na Seção 4.4, a partir da sua terceira colagem, alguma subdivisão por poliedros fundamentais?
- 1.b. Apesar da falta de simetria que decorre da mutação realizada, o seu poliedro mutante assume alguma decomposição em poliedros fundamentais?
2. Dado um poliedro geral, é possível determinar a existência de decomposição em poliedros fundamentais?
3. O que acontece quando temos uma mutação em um poliedros do tipo C?

A depender das respostas acima, a teoria aqui desenvolvida e aplicada no exemplo examinado na Seção 4.2 se estende para aplicação em outros tipos de poliedros não aritméticos. A final, o critério aqui desenvolvido só depende de comparação de volume entre os sub-poliedros dados pela decomposição em poliedros fundamentais.

Outra referência interessante que pode ser utilizada como ferramenta para análise de poliedros hiperbólicos é o programa Coxiter [Gug15] desenvolvido por Guglielmetti. Uma classificação completa de pirâmides por comensurabilidade pode ser vista em [GJK16], desenvolvida utilizando invariantes algébricos.

# Referências Bibliográficas

---

- [ABG<sup>+</sup>21] D. V. Alekseevskii, M.V. Belolipetskii, S. G. Gindikin, V. G. Kac, D. I. Panyushev, D. A. Timashev, O.V Shvartsman, A. G. Élashvili, and O. S. Yakimova. Èrnest Borisovich Vinberg. *Russian Mathematical Surveys*, 76(6):1123, 2021.
- [And70] E. M. Andreev. On convex polyhedra of finite volume in Lobachevskii space. *Matematicheskii Sbornik*, 125(2):256–260, 1970.
- [Dot21] E. Dotti. On the commensurability of hyperbolic coxeter groups, 2021.
- [Fel04] A. Felikson. Coxeter decompositions of compact hyperbolic pyramids and triangular prisms. *Mathematical Notes*, 75(3-4):583–593, 2004.
- [FT04] A. Felikson and P. V. Tumarkin. Reflection subgroups of reflection groups. *Funct. Anal. Appl.*, 38(4):313–314, 2004.
- [GJK16] R. Guglielmetti, M. Jacquemet, and R. Kellerhals. On commensurable hyperbolic Coxeter groups. *Geom. Dedicata*, 183:143–167, 2016.
- [GR19] C. Gyurek and R. Roeder. Problem on mutant pairs of hyperbolic polyhedra. *arXiv preprint arXiv:1906.08723*, 2019.
- [Gug15] R. Guglielmetti. CoxIter – computing invariants of hyperbolic Coxeter groups. *LMS J. Comput. Math.*, 18:754–773, 2015.
- [Mar91] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [RHD07] R. Roeder, J. H. Hubbard, and W. D. Dunbar. Andreev’s theorem on hyperbolic polyhedra. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 57, pages 825–882, 2007.

- [Vin67] E. B. Vinberg. Discrete groups generated by reflections in Lobachevskii spaces. *Matematicheskii Sbornik*, 114(3):471–488, 1967.
- [VMA<sup>+</sup>93] E. B. Vinberg, V. Minachin, D. V. Alekseevskij, O. V. Shvartsman, and A. S. Solodovnikov. *Geometry II: spaces of constant curvature*. Springer, 1993.
- [Zha99] F. Zhang. *Positive semidefinite matrices*, pages 159–207. Springer New York, New York, NY, 1999.