

EMALCA Uberaba 2024 - em homenagem a Jacob Palis

Elementos de teoria ergódica

Pablo Lessa, CMAT, Universidade da República do Uruguai
Roberto Markarian, IMERL, Universidade da República do Uruguai

Resumo: Neste curso serão dados os primeiros elementos da teoria ergódica e será introduzido o tema do bilhar.

Aula 1: Probabilidade. Lei dos grandes números.

A Teoria Ergódica é a intersecção entre a Probabilidade e os Sistemas Dinâmicos. Nesta aula abordamos os conceitos básicos de Probabilidade baseados na Teoria da Medida e um dos dois principais teoremas da Probabilidade, a lei dos grandes números. O outro resultado básico da Probabilidade, o Teorema Central do Limite, não será abordado neste minicurso). Mais tarde veremos como esse resultado se conecta com o teorema mais básico da teoria ergódica do ponto de vista dinâmico: o chamado teorema da ergodicidade individual (ou teorema da ergodicidade de Birkhoff).

Aula 2 - A recorrência de Poincaré.

A Lei dos Grandes Números permite mostrar que, para quase todos os números reais entre zero e um, todos os algarismos aparecem com a mesma frequência na sua expansão decimal. Existe uma outra forma de representar os números entre zero e um, através da sua fração contínua. Um teorema clássico de Khinchin dá informação sobre a fração contínua de quase todos os números entre zero e um. Veremos como este resultado se relaciona com a dinâmica de uma função do próprio intervalo $[0,1]$ chamada aplicação gaussiana. Isto permite-nos introduzir os elementos básicos da teoria ergódica, transformações que preservam uma medida. Seremos capazes de mostrar que, para quase todos os números reais em $[0,1]$, todos os números naturais aparecem na sua fração contínua infinitas vezes.

Aula 3 - Teoria ergódica. Definições básicas.

- Ligações entre a teoria dos gases e a teoria ergódica.
- A hipótese ergódica de Boltzmann.
- Medidas; transformações que preservam medidas.
- Teorema ergódico.
- Fundamentos do decaimento da correlação.

Aula 4: Teorema ergódico.

Veremos que a Lei dos Grandes Números, o Teorema de Khinchin sobre frações contínuas, e um teorema de equidistribuição devido a Weyl, são casos particulares do mesmo teorema: o teorema ergódico de Birkhoff. O resto da aula será dedicado à demonstração do teorema ergódico no caso ergódico (o caso geral está nas notas).

Aula 5: Introdução ao bilhar matemático.

- O bilhar matemático.
- Os primeiros planos de Birkhoff.
- Hipótese ergódica de Boltzmann-Sinai.
- Teoria ergódica diferenciável.
- Bilhares planos
- Não-ergodicidade e ergodicidade.
- Exemplos.
- Cálculo da derivada e da medida invariante.

Referências bibliográficas:

Notas de Pablo Lessa: <http://www.cmat.edu.uy/~lessa/barranquilla.html>

Nikolai Chernov & Roberto Markarian: Introdução à Teoria Ergódica do Bilhar Caótico. IMPA 2003.

Nikolai Chernov & Roberto Markarian: Chaotic Billiards. AMS 2006.

Roberto Markarian: Billares plano. Resumen de resultados sobre sus propiedades ergódicas. <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/pmu3.pdf> pp 13- 33