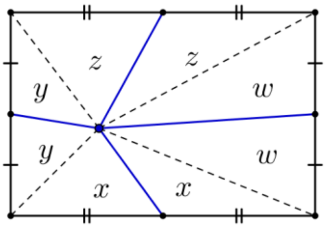
PAPMEM – janeiro de 2024

Soluções da Avaliação final

Questão 1 (valor 0,8)



A figura mostra 4 triângulos com suas medianas. A partir dos dados do problema temos:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ z + w = 32 \end{cases}$$

Somando,

$$x + y + z + w = 48$$
$$x + w + y + z = 48$$

$$A + 20 = 48 \quad \rightarrow \quad A = 28$$

Questão 2 (valor 0,8)

(a) 30, 16, 14, 2, 12

(b) 7, 4, 3, 1, 2

Observe que escrever essa sequência de trás para frente é muito simples, pois o termo anterior a quaisquer dois termos consecutivos é a soma desses termos. Assim, sendo os termos quarto e quinto iguais a 1 e 2, o terceiro será 3, o segundo, 3 + 1 = 4 e o primeiro, 4 + 3 = 7.

(c) A soma do segundo com o terceiro deve ser 25, e o terceiro deve ser maior do que o segundo para que seja o último. Para isso, é necessário e suficiente que o segundo termo seja menor que a metade de 25. Assim, os valores possíveis para o segundo são os números inteiros de 1 até 12.

(d) Seja a o segundo termo da sequência e calculemos os demais termos:

$$60, a, 60 - a, 2a - 60, 120 - 3a, 5a - 180, 300 - 8a, 13a - 480, \ldots$$

Vamos impor agora as restrições do enunciado:

- $0 \leq a < 60$
- $2a - 60 \geq 0 \Rightarrow a \geq 30$
- $120 - 3a \geq 0 \Rightarrow a \leq 40$
- $5a - 180 \geq 0 \Rightarrow a \geq 36$
- $300 - 8a \geq 0 \Rightarrow a \leq 37{,}5$
- $13a - 480 \geq 0 \Rightarrow a \geq 36{,}9$

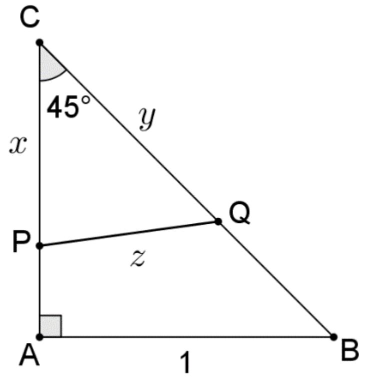
Como a é um número inteiro, $a = 37$ e a sequência é formada pelos termos: 60,37,23,14,9,5,4,1,3.

Questão 3 (valor 1,0)

Como no exercício sobre o sorteio entre Brasil e Argentina, a probabilidade de cada outra equipe enfrentar a equipe italiana é 1/7. Logo, a probabilidade de que a equipe italiana enfrente uma das equipes francesas é 2/7.

Poderíamos também chegar a esse resultado (com mais trabalho) considerando, por exemplo, que o sorteio é feito ordenando as 8 equipes, o que resulta em 8! possibilidades (deste modo, a equipe 1 enfrenta a 2, a 3 enfrenta a 4, e assim por diante). Para contar os casos favoráveis, devemos determinar qual das equipes francesas enfrentará a italiana (2 possibilidades), em qual dos 4 jogos isto ocorre (4 possibilidades), em que ordem estão neste jogo (2 possibilidades) e definir arbitrariamente a posição das equipes restantes nos outros jogos (6! possibilidades). Logo, a probabilidade de haja um confronto entre duas uma equipe francesa e a equipe italiana é $\frac{2\times4\times2\times6!}{8!} = \frac{2\times4\times2}{8\times7} = \frac{2}{7}$.

Questão 4 (valor 1,0)



Sejam $CP = x$, $CQ = y$ e $PQ = z$.
A área do triângulo ABC é igual a $1/2$ e, portanto, a área do triângulo PQC é igual a $1/4$. Temos então:

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin 45° = \frac{1}{4}$$

e daí, concluímos que

$$xy = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Passamos agora a calcular $PQ = z$ usando a Lei dos Cossenos:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 45°$$
$$z^2 = x^2 + y^2 - 1$$

Para obter o valor mínimo de z devemos usar o fato que $xy = \sqrt{2}/2$. Escrevemos, então:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy + 2xy - 1$$
$$z^2 = (x - y)^2 + \sqrt{2} - 1$$

Para que z seja mínimo devemos ter $x = y$. Assim, o valor mínimo de z é

$$z = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

Questão 5 (valor 1,0)

Queremos saber a que taxa mensal de juro, 9 (hoje) é equivalente a 5 daqui a 1 mês mais 5 daqui a 2 meses. Considerando i como taxa e $f = 1 + i$ como o fator mensal de atualização do capital, temos que:

$$9 = \frac{5}{f} + \frac{5}{f^2}$$

Como $f > 1$, então,

$$9f^2 - 5f - 5 = 0$$

Daí temos que: f = 1,07222.
Logo $i \cong 7{,}22\%$.

Questão 6 (valor 1,0)

<u>Primeira Solução</u>

Vamos separar o problema em 2 casos disjuntos:

<u>Caso 1</u>: cada estudante em um hotel diferente (dentre os 4 hotéis disponíveis) e

<u>Caso 2</u>: dois estudantes em um mesmo hotel e, o terceiro, em outro.

Note que esses dois casos são efetivamente disjuntos e sua 'união' é a totalidade dos casos. Ou seja, determinam uma partição no conjunto das situações 'possíveis'. Como consequência, pelo *Princípio da Adição*, poderemos somar os quantitativos a serem obtidos.

Vamos, então, contar tais casos.

Caso 1: cada estudante em um hotel diferente.

Há 4 escolhas de hotel para acolher o primeiro estudante, 3 escolhas de hotel para o segundo estudante e 2 escolhas para o terceiro, sucessivamente. Pelo *Princípio da Multiplicação* há, então, $4 \times 3 \times 2 = \mathbf{24}$ situações diferentes de escolha para o *caso 1*.

Caso 2: dois estudantes em um mesmo hotel e o terceiro em outro.

Vamos analisar esse *Caso 2* em duas etapas: a escolha para a 'dupla de estudantes' e, a seguir, para o estudante 'isolado'.

Etapa 1: Há $C_3^2 = 3$ formas de escolher o par de estudantes (dentre os três) que ficará no mesmo hotel. E, para cada escolha desse par de estudantes, há *sempre* 4 escolhas possíveis de hotel. Logo, pelo *Princípio da Multiplicação*, há $3 \times 4 = \mathbf{12}$ formas de escolher o hotel para a 'dupla'.

Etapa 2: Mas para cada escolha do hotel da 'dupla', resta apenas 1 estudante para escolher um dos três hotéis não utilizados pela 'dupla'. Logo, há $1 \times 3 = \mathbf{3}$ formas de escolha para o estudante 'isolado'.

Então, pelo *Princípio da Multiplicação* o total de escolhas do *Caso 2* (*Etapas 1 e 2*) é $12 \times 3 = \mathbf{36}$.

Logo, pelo *Princípio da Adição*, o total desejado (*Caso1* + *Caso2*) é $24 + 36 = \mathbf{60}$.

Segunda Solução

Desconsiderando a restrição de no máximo $\mathbf{2}$ estudantes em um mesmo hotel, podemos, a seguir, subtrair as situações não permitidas ($\mathbf{3}$ estudantes em um mesmo hotel).

Para colocar os $\mathbf{3}$ estudantes em $\mathbf{4}$ hotéis, sem restrição, há $\mathbf{4}$ opções de hotel para cada um dos três, sucessivamente. Logo, Pelo *Princípio da Multiplicação*, há $4 \times 4 \times 4 = 64$ formas de fazê-lo.

Mas como há $\mathbf{4}$ hotéis, há $\mathbf{4}$ formas de colocar os três estudantes no mesmo hotel (situação não permitida).

Daí, subtraindo essas $\mathbf{4}$ opções não permitidas, obtemos $\mathbf{64 - 4 = 60}$ possíveis escolhas.

Questão 7 (valor 1,0)

Emanuel é o culpado.

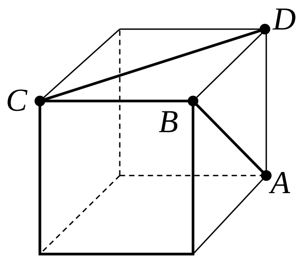
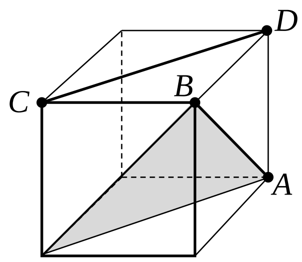
Segue uma justificativa lógica. Dorival é inocente, pois, sua afirmação é verdadeira.

Bartolo também é inocente. De fato, suponha que fosse culpado; então todos os outros seriam inocentes; por outro lado, sendo culpado, sua afirmação "O culpado ou é o Dorival ou é o Emanuel" é falsa, logo, Dorival e Emanuel seriam inocentes. Como Emanuel disse que Antônio é culpado (o que, como vimos acima, é falso), chegamos a uma contradição.

Bartolo afirmou que "O culpado ou é o Dorival ou é o Emanuel" e isso é uma verdade; portanto, Emanuel é o culpado, pois já vimos que Dorival é inocente.

Questão 8 (valor 1,0)

Remontando o cubo, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ serão diagonais de faces dispostas sobre retas reversas, como na figura abaixo. A diagonal da face oposta de $\overline{CD}$, e paralela $\overline{CD}$, concorre com $\overline{AB}$ em uma de suas extremidades. Essas duas últimas diagonais são lados de um triângulo equilátero formado por três diagonais de faces do cubo. Sendo assim, o ângulo entre as retas suportes de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ mede 60º.


D
C
B
A

D
C
B
A