Papmem – janeiro de 2024

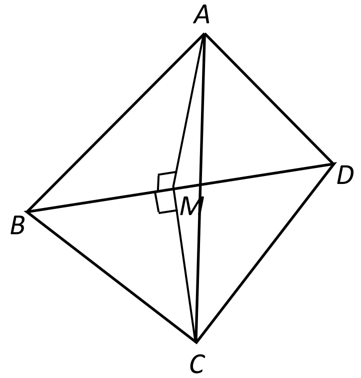
Soluções dos exercícios 19 a 24

19. (C)
Para a passagem da corrente na parte superior do circuito, basta ligar a chave B. Para a parte inferior, será necessário ligarmos duas chaves, ou D e F ou E e F. A quantidade mínima de chaves que devem ser ligadas para que a lâmpada se acenda é, portanto, 3.

20. (A)
Pinóquio tem chapéus, pois o enunciado nos informa que ele experimentou um deles. A sentença “Eu tenho um chapéu que não é verde” é falsa, pois Pinóquio sempre mente; logo, sua negação deve ser verdadeira. Assim, todos os chapéus que Pinóquio tem são verdes.

21. (A)
Há exatamente 3 caixas que contêm bolas com número coincidente com o número dela; podemos, sem perda de generalidade e para fixar as ideias, supor que são as caixas 1, 2 e 3. Desse modo, a caixa que foi aberta, de acordo com enunciado, foi a caixa 4 ou a caixa 5. Se foi a caixa 4, dentro dela deve ter aparecido a bola 5, indicando que a caixa 5 não contém a bola 5 e a distribuição de bolas nas caixas é 1 2 3 5 4. Analogamente, se a caixa aberta foi a 5, dentro dela só pode ter aparecido a bola 4 e, novamente, a distribuição de bolas é 1 2 3 5 4. Logo, nenhuma caixa adicional precisará ser aberta para descobrirmos o conteúdo de todas as caixas, obedecendo, é claro, às informações fornecidas pelo enunciado.

22. (E)
Em um triângulo equilátero, a altura relativa a qualquer dos lados também é mediana. Tracemos as alturas dos triângulos *ABD* e *CBD* relativas ao lado $\overline{BD}$. As duas alturas vão passar por *M*, ponto médio de $\overline{BD}$, porque também são medianas. A reta $\overline{BD}$ é perpendicular ao plano *ACM* porque é perpendicular a $\overline{AM}$ e a $\overline{CM}$, duas retas concorrentes do plano *ACM*. A reta $\overline{AC}$ é uma reta de *ACM*, portanto, ortogonal a $\overline{BD}$.



23. (E)
Se o ângulo $M\hat{P}N$ é reto, o triângulo *MPN* é retângulo com hipotunusa $\overline{MN}$. A altura desse triângulo relativa à hipotenusa mede *h*. Sejam *m* e *n* as projeções dos catetos $\overline{MP}$ e $\overline{NP}$ sobre a hipotenusa, e *H*, o pé da altura. Da semelhança entre os triângulos *MPH* e *NPH*, temos:

$$h^2 = m \cdot n \qquad (1)$$

Além disso, $m + n = k$, ou $n = k - m$. Substituindo essa última expressão em (1), temos:

$$h^2 = m \cdot (k - m)$$
$$h^2 = km - m^2$$
$$m^2 - km + h^2 = 0$$

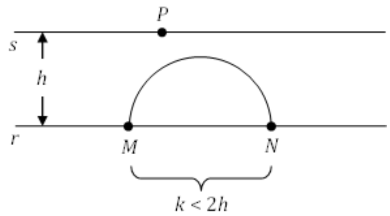
Resolvendo essa equação para *m*, vem:

$$m = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4h^2}}{2}$$

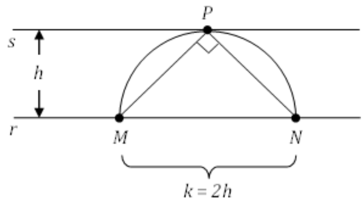
Há três situações a considerar:
• se $k^2 - 4h^2 < 0$, o que nos dá $k < 2h$, a equação não apresenta solução real e o ângulo $M\hat{P}N$ jamais será reto;
• se $k^2 - 4h^2 = 0$, o que nos dá $k = 2h$, a equação apresenta uma única solução real e o ângulo $M\hat{P}N$ será reto uma única vez, a saber, quando $m = n = \frac{k}{2} = h$;
• se $k^2 - 4h^2 > 0$, o que nos dá $k > 2h$, a equação apresenta duas soluções reais distintas, e o ângulo $M\hat{P}N$ será reto duas vezes.
Portanto, $k > 2h$.

<u>Solução 2</u>:
Se o ângulo $M\hat{P}N$ é reto, o triângulo *MPN* é retângulo com hipotunusa $\overline{MN}$. Todo triângulo retângulo é inscritível em simicircunferência de diâmetro igual à hipotenusa.

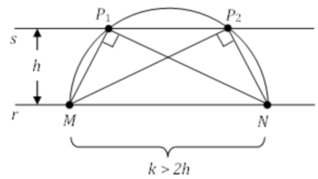
• Se $k < 2h$, a semicircunferência de diâmetro $\overline{MN}$ não terá qualquer ponto comum com a reta *s*, e o ângulo $M\hat{P}N$ jamais será reto.



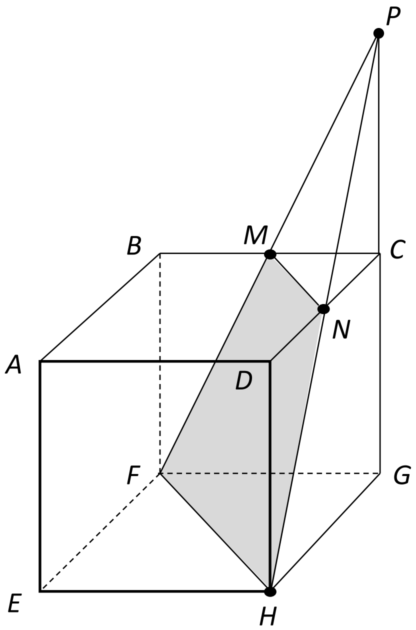
• Se $k = 2h$, a reta *s* será tangente à semicircunferência de diâmetro $\overline{MN}$, e o ângulo $M\hat{P}N$ será reto uma única vez, quando *P* estiver no ponto de tangência.



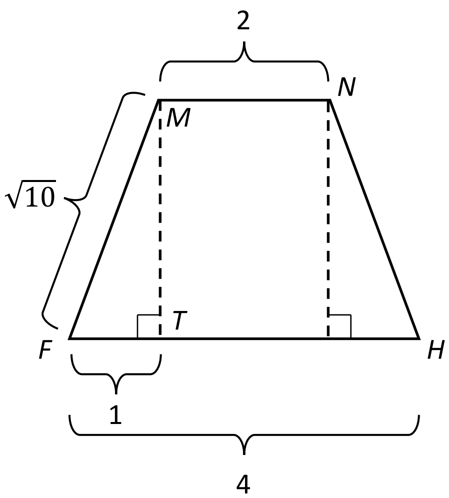
• Se $k > 2h$, a reta *s* será secante à semicircunferência de diâmetro $\overline{MN}$, e o ângulo $M\hat{P}N$ será reto exatamente duas vezes, quando *P* estiver nos pontos comuns à reta e à semicircunferência.
Portanto, $k > 2h$;



24. (D)
Vamos nomear os vértices do cubo como representado abaixo e traçar a reta $\overline{FM}$, que encontrará a reta $\overline{CG}$ no ponto *P* ($\overline{FM}$ e $\overline{CG}$ estão contidas no plano *FGCB* e não são paralelas). Tracemos, também, a reta $\overline{HP}$. Os triângulos *PGF* e *PGH* são congruentes (dois triângulos retângulos com catetos congruentes), assim como os triângulos *MBF* e *MCP* (ângulos opostos pelo vértice, ângulo reto e cateto que participa desses dois ângulos congruentes). Dessa última congruência, concluímos que *M* é médio de $\overline{FP}$. Devido a congruência entre *PGF* e *PGH* conclui-se que o ponto de encontro de $\overline{HP}$ com $\overline{CD}$.é médio de $\overline{HP}$. Esse ponto também é médio de $\overline{CD}$.(o segmento que tem extremidades nesse ponto e em C é paralelo a aresta $\overline{GH}$ e mede a metade dela). Conclui-se que o ponto *N* pertence a $\overline{HP}$.



Os pontos *M* e *N* são pontos médios dos lados $\overline{FP}$ e $\overline{HP}$. do triângulo *PFH*. Portanto, $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{FH}$. e mede a metade de $\overline{FH}$. O plano determinado por *M*, *N* e *H* é o mesmo plano determinado por *P*, *F* e *H*, e a seção no cubo determinada por M, N e H é um trapézio isósceles. A base maior desse trapézio é uma diagonal de face do cubo e mede $2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$. Por sua vez, a base menor mede a metade da base maior, 2. O segmento $\overline{FM}$, lado não paralelo do trapézio, é a hipotenusa de um triângulo cujos catetos medem $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$, e mede $\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{10}$. Observemos o trapézio *MNHF* fora do cubo:



A altura do trapézio é $\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 - 1^2} = 3$, e a área procurada é $\frac{4+2}{2} \times 3 = 9$.