Papmem – janeiro de 2024

Soluções dos exercícios 13 a 18

13. (A)

$P = 3000 \times 1{,}02^3 \times 0{,}02/(1{,}02^3 - 1) = 1.040{,}26$

14. (E)

Os VF calculados:

($9.411.818,01)

($4.482.003,46)

Logo a diferencia é de 5 milhões de reais

15. (C)

11/1,1 + 12.1/1,21 + 26.6/1,331 é de, aproximadamente, 40 mil reais.

16. (A)

Primeira Solução

Cada um dos 3 jogadores escolhe, dentre as 40 peças disponíveis, suas 7 peças. Essa estratégia é uma aplicação imediata do *Princípio da Multiplicação* e do cálculo da quantidade de subconjuntos... Veja:

O primeiro jogador pode escolher 7 dentre 40 peças; o segundo, 7 dentre as 33 restantes e o terceiro, pode escolher 7 dentre as 26 peças restantes.

Obs: A escolha do segundo e terceiro jogadores possuem a mesma quantidade de opções disponíveis, qualquer que tenha sido a escolha anterior, embora tal escolha dependa das escolhas feitas anteriormente. Não há independência nas escolhas sucessivas, mas a igualdade nos quantitativos subsequentes permite a aplicação do *Princípio da Multiplicação*. Logo:

$$Qde = \binom{40}{7} \times \binom{33}{7} \times \binom{26}{7} = \frac{40!}{19!\,(7!)^3}$$

Segunda Solução

Como apenas 21 das 40 peças serão utilizadas, uma estratégia é escolher, preliminarmente, as 21 peças que serão distribuídas. Há, naturalmente $\binom{40}{21}$ formas de fazê-lo, que corresponde ao número de subconjuntos com 21 elementos que podemos formar com as 40 peças disponíveis.

A seguir, como na solução anterior, escolhemos as 7 peças para cada um dos jogadores (agora, dentre as 21 peças previamente selecionadas). Esse subtotal é dado por

$$\binom{21}{7} \times \binom{14}{7} \times \binom{7}{7}$$

Então, mais uma vez, pelo *Princípio da Multiplicação*, a quantidade total é dada por

$$Qde = \binom{40}{21} \times \left[\binom{21}{7} \times \binom{14}{7} \times \binom{7}{7}\right] = \frac{40!}{19!\,(7!)^3}$$

Terceira Solução

Usando a estratégia inicial da segunda solução, escolhemos, preliminarmente, as 21 peças a serem distribuídas – há $\binom{40}{21}$ formas de fazê-lo.

Designamos, agora, os jogadores pelas letras A, B e C e dispomos na mesa as 21 peças a serem distribuídas – da 1ª até a 21ª (de cabeça para baixo – rsrs). Cada jogador, então, "*coloca um papelzinho com sua letra sobre cada peça escolhida*".

Então, cada escolha corresponde a uma sequência de 21 letras (dentre as letras A, B e C), onde haverá, como veremos a seguir, 7 repetições de cada uma das letras. Eis um exemplo da associação das peças aos jogadores:

Jogadores $\Rightarrow$	A	B	A	A	C	B	B	...	C	A	B	A
Peças $\Rightarrow$	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	...	18ª	19ª	20ª	21ª

Se as letras fossem diferentes, haveria 21! formas diferentes de associar as letras às *21 peças...* Mas observe que se *numerarmos* cada uma das ocorrências das letras A, B e C, a distribuição anterior fica assim:

Jogadores $\Rightarrow$	A_1	B_1	A_2	A_3	C_1	B_2	B_3	...	C_7	A_6	B_7	A_7
Peças $\Rightarrow$	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	...	18ª	19ª	20ª	21ª

Então, a ordenação das letras A's, B's ou C's dentro das posições previamente indicadas não muda a distribuição das peças recebidas pelos jogadores. Então, há 7! repetições nas escolhas das peças para cada um dos jogadores

Daí, eliminando as repetições, obtemos $\frac{21!}{(7!)^3}$ possíveis escolhas. Mas como há $\binom{40}{21}$ formas de escolher as 21 cartas a serem distribuídas, a resposta final é, pelo Princípio da Multiplicação,

$$\binom{40}{21} \times \frac{21!}{(7!)^3} = \frac{40!}{21!\,19!} \times \frac{21!}{(7!)^3} = \frac{40!}{19!\,(7!)^3}$$

Quarta Solução

Essa solução é análoga à anterior, mas sem selecionar previamente as 21 cartas a serem distribuídas. Da mesma forma designamos por A, B e C cada jogador e por M as cartas que não serão escolhidas. Obtemos:

Jogadores $\Rightarrow$	A_1	B_1	A_2	A_3	C_1	B_2	B_3	...	M_{19}	A_6	B_7	A_7
Peças $\Rightarrow$	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	...	37ª	38ª	39ª	40ª

Pelo mesmo argumento da solução anterior, há respectivamente 7! contagens duplicadas das letras A, B e C e 19! para letra M (as peças não selecionadas pelas jogadores). Daí o total de escolhas é dado, por

$$\frac{40!}{19!\,(7!)^3}$$

17. (B)

Para formar duas peças concatenadas, podemos retirar a primeira peça de 40 formas diferentes (pois que há 40 peças diferentes no jogo *Trix*).

Retirada essa peça, vamos analisar quantas peças podem ser concatenadas a ela. Vamos dividir em dois casos:

- **Caso 1**: a própria peça espelhada dessa 1ª peça retirada
- **Caso 2**: demais peças eventualmente concatenáveis

Caso1:

Naturalmente que a peça espelhada pode se concatenar com **qualquer** um dos três lados da peça inicial!

Caso2:

Suponhamos que a 1ª peça retirada seja a peça **1/2/3** (sentido horário). Ora, em cada lado dessa peça, além da peça espelhada, há mais 3 peças concatenáveis em <u>cada lado</u>! Veja, lendo sempre no sentido horário:

- lado **1, 2**, as peças **2/1/4; 2/1/5 e 2/1/6;**
- lado **2, 3**, as peças **3/2/4; 3/2/5 e 3/2/6**, e
- lado **3, 1**, as peças **1/3/4; 1/3/5 e 1/3/6;**

Então, para cada peça escolhida, há 10 peças concatenáveis (3 lados × 3 + 1 peça espelhada). Como há 40 formas de escolher a 1ª peça, em tese, pelo *Princípio da Multiplicação*, teremos

$$40 \times 10 = 400$$

formas de escolher um "par concatenável".

Mas note que cada par de peças **X** e **Y** concatenáveis está contado duas vezes: quando escolho a peça **X** como primeira (e **Y** é contada como uma das concatenáveis) e quando **Y** é a primeira, **X** sendo concatenável... Logo, o número desejado é 400/2 = 200.

18. (D)
<u>Primeira solução</u>

Fixando um dos vértices de uma peça e numerando-a a partir desse vértice, no sentido horário, temos 6 escolhas do número para o vértice fixado e, sucessivamente, 5, 4 e 3 escolhas para os vértices subsequentes. Pelo *Princípio da Multiplicação*, obtemos, aparentemente, $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ formas de numerar uma peça. No entanto, dados 4 números (distintos) a, b, c e d, as numerações circulares $abcd$; $bcda$; $cdab$ e $dabc$ conduzem à mesma peça. Eliminando tais repetições, obtemos $360/4 = 90$.

<u>Segunda solução</u>

<u>Etapa1</u>: calculemos de quantas formas diferentes podemos escolher $\mathbf{4}$ dos $\mathbf{6}$ números disponíveis para compor uma peça: $C_6^4 = 15$**.**

<u>Etapa2</u>: Dados **4** números, quantas peças diferentes podem ser formadas? A princípio, $4! = 24$ peças. Mas as ordenações de $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$ 'circulares' conduzem à mesma peça. Logo dados 4 números, há apenas $24/4 = 6$ peças diferentes.

Então, pelo *Princípio da Multiplicação*, o número máximo de peças do *Quadrix* é $15 \times 6 = 90$.