Probabilidade: é equiprovável ou não?

Paulo Cezar Pinto Carvalho

O estudo de probabilidade no Ensino Básico normalmente trata do caso em que o espaço amostral (ou seja, o conjunto de possibilidades para um experimento aleatório) é um conjunto finito $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. A cada resultado possível ω_i atribuímos uma probabilidade p_i, que pode ser interpretada como sendo a fração das vezes em que esse resultado é observado, quando o experimento é realizado um grande número de vezes. Evidentemente, devemos ter $p_i \geq 0$ para cada i e, além disso, $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Uma vez estabelecidos os valores para as probabilidades de cada resultado possível, podemos definir a probabilidade de qualquer evento A (ou seja, de qualquer subconjunto de Ω) como a soma das probabilidades dos resultados em A.

Mas como encontrar os valores das probabilidades p_i? No caso geral, esses valores são obtidos de forma experimental (a *Estatística* é a parte da Matemática que lida com este problema). Mas há certos casos em que é razoável supor que todos os resultados são igualmente prováveis e que, portanto, a probabilidade de cada um deles é igual a $1/n$. Por exemplo, ao lançar um dado perfeitamente cúbico não há nenhuma razão para esperar que uma face apareça com mais frequência que qualquer das outras. Logo, a probabilidade associada a cada face é igual a $1/6$. Modelos probabilísticos que têm esta característica são chamados de *equiprováveis* e estão frequentemente associados a jogos de azar. Nos modelos probabilísticos equiprováveis, a probabilidade associada a um evento A com p elementos é igual a $p.\frac{1}{n} = \frac{p}{n}$. Muitas vezes se exprime este fato dizendo que a probabilidade de um evento é igual *à razão entre o número de casos favoráveis ao evento e o número de casos possíveis*.

É necessário, no entanto, ter cuidado com a frase acima. Só devemos utilizá-la para calcular a probabilidade de um evento quando tivermos um argumento envolvendo algum tipo de simetria para fundamentar o fato de que a mesma probabilidade deva ser atribuída a todos os resultados possíveis de um experimento. Normalmente, isto ocorre quando as situações envolvem objetos propositalmente construídos de modo a serem simétricos ou idênticos (dados, cartas de baralho, bolas em urnas) ou que aproveitem a simetria de objetos construídos para outros usos (como no lançamento de moedas). É importante desenvolver nos alunos as habilidades de distinguir situações equiprováveis das não equiprováveis e de encontrar uma formulação equiprovável para um problema. Os exercícios a seguir procuram fazer isto. Reflita sobre cada um deles antes de olhar as soluções.

Exercícios

1. Considere as seguintes situações
   - João e mais quatro amigos vão disputar uma corrida. Qual é a probabilidade de que João seja o vencedor?
   - Cinco amigos vão disputar uma corrida. Logo antes da corrida, camisas de 1 a 5 são sorteadas entre eles. Qual é a probabilidade de que a pessoa usando a camisa 2 seja o vencedor?

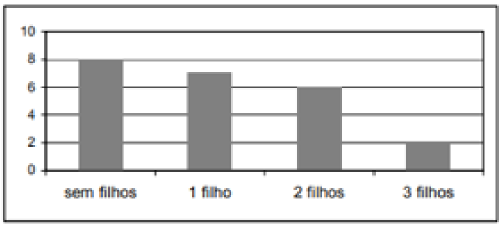
   Os enunciados são equivalentes? A resposta é a mesma nos dois casos?

2. Deseja-se saber qual é a probabilidade de que sejam observadas exatamente 2 caras ao se lançar 3 vezes uma moeda "equilibrada" (ou seja, que têm a mesma probabilidade de produzir cara ou coroa em um lançamento). A seguinte solução foi apresentada: "Há quatro possibilidades para o número de caras observadas em 3 lançamentos: 0, 1, 2 ou 3. Logo, a probabilidade de que saiam exatamente 2 caras é 1/4." A solução está correta?

3. Uma moeda honesta é lançada dez vezes. É mais provável que a sequência de resultados obtidos seja CCCCCCCCCC ou CKKCCCKKCK? (C representa cara e K, coroa)

4. Um dado especial tem quatro faces verdes (V) e duas amarelas (A). Qual das sequências a seguir é a mais provável de ser obtida em seis lançamentos desse dado?
   A) AAAAAA B) AVAVAV C) AAVVVV D) AVVAVV E) VVVVVV

5. (ENEM 2005) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico abaixo.



   Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:
   A) 1/3 B) 1/4 C) 7/15 D) 7/23 E) 7/25

6. Considere as duas soluções propostas para a situação a seguir. Dois dados idênticos são lançados ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de a soma dos números das faces observadas seja igual a 7?
   1ª solução: Há 36 possibilidades de resultado, das quais 6 dão soma 7; a probabilidade é 1/6.
   2ª solução: Como os dados são idênticos, há 15 + 6 = 21 possibilidades de resultado, das quais 3 dão soma 7; a probabilidade é 1/7.
   Qual é a solução correta?

7. Para sortear 10 vagas, numeradas de 1 a 10, em um condomínio, um papelzinho com o número de cada vaga (a boa é a 7!) é colocado em uma urna. Você prefere ser o primeiro ou o último a sortear um papel?

8. (OBMEP 2016) A professora decidiu premiar, por sorteio, dois dentre os 20 alunos da turma de João. Para o sorteio, 20 bolas com os números dos alunos foram colocadas em um caixa. A primeira bola sorteada pela professora caiu no chão e se perdeu, sem que ninguém visse seu número. Ela decidiu fazer o sorteio com as bolas restantes. Qual é a probabilidade de que João tenha sido um dos dois alunos sorteados?
   A) 1/10 B) 2/19 C) 19/200 D) 39/380 E) 37/342

Soluções e comentários

1. A primeira situação foi inspirada em um exercício semelhante encontrado em um livro didático para o Ensino Fundamental. O objetivo do exercício era que o aluno encontrasse a resposta 1/5, como a razão entre o número de casos favoráveis (1) e o número de casos possíveis (5). Mas a formulação é inadequada e contribui para a visão equivocada de que em qualquer situação probabilidades podem ser calculadas desta forma. Por exemplo, é comum alguém dizer que, em uma partida de futebol, a probabilidade de empate e de vitória de cada time é igual a 1/3, já que há três possibilidades de resultado. Tanto no caso da corrida quanto da partida, não é razoável supor, sem maiores informações, de que os resultados sejam igualmente prováveis. A construção de um modelo probabilístico razoável requer informações sobre o desempenho anterior dos corredores e das equipes.
Já na segunda situação, a resposta é 1/5. Independentemente de quem seja o ganhador da corrida, ele tem probabilidade 1/5 de ter recebido a camisa de número 2 (supondo, naturalmente, que o sorteio das camisas tenha sido feito de modo justo).

2. Esta é mais um emprego automático e incorreto de probabilidade = número de casos favoráveis / número de casos possíveis. A "solução" dá uma possível listagem de possibilidades para o resultado do experimento (o número de caras observadas). Mas esta listagem não é conveniente para o cálculo de probabilidades porque não há nada que justifique que essas possibilidades devam ser equiprováveis (na verdade, se aumentarmos o número de lançamentos, digamos para 10, fica claro, intuitivamente, que obter 5 caras é muito mais provável que obter 10 caras). Para obter uma descrição equiprovável dos resultados possíveis, devemos voltar ao essencial: em um lançamento, é razoável admitir que sair cara ou coroa são resultados equiprováveis, devido à quase perfeita simetria de uma moeda. Além disso, o que sai no primeiro lançamento não impacta em nada o resultado do segundo (ou você acha que moedas têm memória ou senso de justiça?). O mesmo ocorre com o terceiro lançamento. Em consequência, todas as 8 sequências de resultados possíveis (CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK, onde C representa cara e K, coroa) são igualmente prováveis. Como em 3 delas temos duas caras, a probabilidade pedida é 3/8.

3. Pelo mesmo argumento do exercício anterior, as duas sequências têm a mesma probabilidade de ocorrer. Embora isto seja quase óbvio, ao responder a esta pergunta muitos apontam a segunda sequência como mais provável. De fato, é mais provável obter 5 caras e 5 coroas do que 10 caras, mas isto ocorre porque há muitas sequências diferentes com 5 caras e 5 coroas e uma só com 10 caras.

4. A pergunta está relacionada à anterior, mas, agora, os resultados de cada lançamento não são equiprováveis. Como os resultados dos lançamentos são independentes, a probabilidade de se obter uma sequência com k V´s e $(6 – k)$ A´s é $\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k}$. O valor máximo ocorre quando todos os fatores são iguais a 2/3, ou seja, quando todos os resultados são V. Portanto, a sequência mais provável é VVVVVV (alternativa E).

Novamente, algumas pessoas poderão ser atraídas pelas respostas C ou D, porque, no longo prazo, o mais provável é que 2/3 dos resultados sejam V. Mas cada sequência individual com 2/3 dos resultados V é menos provável do que a sequência com todos os resultados V.

5. A resolução é imediata, uma vez que escolhamos adequadamente o espaço amostral para o modelo probabilístico. Como quem é sorteado é uma criança, o número de possibilidades é o total de filhos, que é igual a 7x1 + 6x2 + 2x3 = 25. Admitindo que o sorteio seja justo, todos têm a mesma chance de serem sorteados. O número de casos favoráveis é o total de filhos das ex-alunas com apenas um filho, que é igual a 7. Logo, a probabilidade de que o sorteado seja um filho único é igual a 7/25 (alternativa E). As outras alternativas correspondem a escolhas erradas do espaço amostral. Por exemplo, a resposta 7/15 corresponde a usar o número correto de casos favoráveis, mas considerar que o número de casos possíveis é o número de ex-alunas que têm filhos. Procure ver que erro de modelagem conduz a cada uma das demais.

6. A primeira solução é a correta. Se os dados fossem distintos (de cores diferentes, por exemplo) não teríamos dúvidas em escolher essa solução. O fato de os dados serem idênticos não altera em nada a situação (se colocarmos uma pequena marca em um dos dados, recaímos na primeira situação). Novamente, a segunda solução envolve a escolha de um espaço amostral que à primeira vista é razoável, por corresponder ao que é possível observar, mas que não é conveniente, por não ser equiprovável.

7. Este exercício é baseado em uma situação real, em que alguns condôminos insistiam em ser dos primeiros a sortear e outros queriam ficar para o final. Na verdade, o número 7 tem a mesma probabilidade de sair em qualquer posição: o resultado do sorteio é uma permutação dos números de 1 a 10 e o 7 aparece com igual frequência em todas as posições.

8. Uma possível solução consiste em tomar como espaço amostral o conjunto das sequências das três bolas sorteadas, claramente equiprovável. O número de possibilidades é 20 x 19 x 18. Para que João seja sorteado, é preciso que seu número não saia na primeira bola sorteada (19 possibilidades) e saia em uma das outras duas bolas sorteadas (2 possibilidades); a última bola pode ser qualquer uma das 18 bolas restantes. Logo, o número de casos favoráveis é 19 x 2 x 18 e a probabilidade de que João seja sorteado é $\frac{19\times2\times18}{20\times19\times18}=\frac{1}{10}$. Ao chegarmos a uma resposta tão simples é natural (e instrutivo) indagar se poderíamos chegar a ela de um modo mais simples. A resposta é SIM! Como vimos no exercício anterior, a probabilidade de que o número de João saia em qualquer bola retirada é 1/20. Assim, a probabilidade de que ele seja sorteado na primeira bola válida é 1/20; o mesmo ocorre na segunda bola. Como ele só pode ser sorteado uma vez, os eventos são mutuamente exclusivos e a probabilidade de ele ser sorteado é a soma dessas probabilidades, ou seja, é igual a $\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{10}$.