Desigualdade isoperimétrica

José Luiz Pastore Mello (RPM/SBM)

Da geometria diferencial às equações diferenciais parciais, não faltam exemplos de desdobramentos do problema isoperimétrico. Mas e na matemática escolar, há espaço para ele?

"As desigualdades podem ser mais interessantes do que as identidades. Eu não conheço muitas coisas mais belas e perfeitas do que uma desigualdade matemática aguda."

Fernando Codá, matemático brasileiro, em entrevista para Notices/AMS, fev./2016.

1. A lenda de Cartago

No épico Eneida do século I A.C. o poeta Virgílio nos conta sobre a fundação de Cartago. Segundo a lenda, a rainha fenícia Elissa, que depois passa a se chamar Dido, foge do seu irmão Pigmaleão, que havia mandado matar seu marido por cobiça, embarcando num navio que a leva até o norte de África. Lá chegando, Dido resolve ficar e formar sua nova pátria negociando com o rei Jarbas a compra de terras. De acordo com o que ficou acertado, ela só poderia comprar a quantidade de terras que conseguisse cercar usando a pele de um único boi. A esperta Dido cortou e emendou várias tiras do couro formando um extenso cordame. Já que seu interesse era o de cercar a maior extensão possível de terras, Dido ordenou que usassem o cordame cercando a colina de Birsa em forma de semicírculo. Com o tempo a cidade se expandiu se transformando em Cartago. As ruínas que restaram de Cartago estão localizadas atualmente nos arredores da cidade de Túnis, na Tunísia.

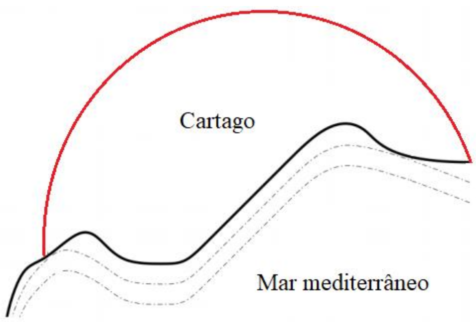


Figura 1 - Representação aproximadamente semicircular do contorno da cidade de Cartago.

Figura 2 – Ruinas de Cartago.

Não sabemos se tal lenda retrata os fatos como realmente aconteceram, mas é curioso observar que o problema da busca da forma plana que maximiza a área para certo perímetro é de natureza matemática e provavelmente tão antigo quanto a lenda de Cartago. Tal problema recebe o nome de isoperimétrico.

2. O problema isoperimétrico

O problema isoperimétrico no plano é considerado um dos clássicos mais importantes da matemática, com desdobramentos em inúmeras áreas de investigação. Seu enunciado diz que:

Dado um comprimento L > 0, encontrar, dentre todas as curvas do plano de comprimento L, aquela que engloba a maior área.

Essa forma do enunciado, também chamada de primal, possui versão equivalente, chamada dual. A solução do problema primal está completamente determinada pela do seu dual, e vice versa. O enunciado dual do problema isoperimétrico diz que:

Dada uma área A > 0, encontrar, dentre todas as curvas que englobam esta área, a que tem menor perímetro.

A solução do problema isoperimétrico afirma que a relação entre L e A sempre será expressa pela desigualdade $4\pi A \leq L^2$, sendo que a igualdade ocorrerá quando a curva fechada for um círculo. Desse resultado decorre o fato de que polígonos convexos de perímetro L sempre terão área menor do que a de um círculo de circunferência L. Também vem daí a conclusão de que tal círculo será a curva fechada de maior área possível dentre todas as curvas fechadas de comprimento L. Leitores interessados em explorar as inúmeras sutilezas, demonstrações e aplicações do problema isoperimétrico encontrarão excelente material de consulta nas referências [1] e [2].

3. O problema isoperimétrico e a divisão ótima de um triângulo equilátero

É bem conhecido o resultado de que a mediana de um triângulo tem a propriedade de dividi-lo em dois triângulos de mesmas áreas, mas será que a mediana é o segmento de reta mais curto a cumprir tal propriedade? Analisaremos esse problema em um triângulo equilátero *EDF*, de lado 1, com *P* e *Q* sendo pontos de lados distintos desse triângulo, como indica a figura 4. Interessa-nos encontrar a menor medida PQ=z na comparação das situações em que $\overline{PQ}$ divide a área do triângulo ao meio.

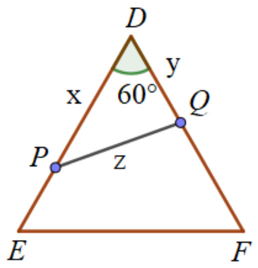


Figura 4

Como $\overline{PQ}$ divide a área de *EDF* ao meio, então o triângulo *DPQ* e o quadrilátero *EPQF* possuem áreas iguais $\frac{\sqrt{3}}{8}$, o que permite concluir que:

$$\frac{x \cdot y \cdot \text{sen}\, 60°}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}, \text{ ou seja, } xy = \frac{1}{2}.$$

Aplicando a lei dos cossenos em *DPQ*, teremos:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 60°,$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \text{ o que implica em } z^2 = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}.$$

Agora usaremos um truque algébrico útil. Somando e subtraindo $2xy$ do lado esquerdo da última igualdade, teremos:

$$z^2 = x^2 - 2xy + y^2 - \frac{1}{2} + 2xy,$$

$$z^2 = (x-y)^2 + \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } z = \sqrt{(x-y)^2 + \frac{1}{2}}.$$

Observe agora que o valor mínimo de z ocorrerá quando $x = y$, caso em que $\overline{PQ}$ será paralelo a $\overline{EF}$ e z terá comprimento igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Mais algumas contas e concluímos facilmente que, na situação ótima, o triângulo *DPQ* será equilátero, com $x = y = z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como cada mediana de *EDF* $\left(x = 1,\ y = \frac{1}{2} \right)$ mede $\frac{\sqrt{3}}{2}$, que é um número maior do que $\frac{\sqrt{2}}{2}$, fica agora evidente que há segmento menor do que a mediana que atende as condições do problema. Por simetria rotacional se observa a existência de dois outros segmentos congruentes a $\overline{PQ}$ que também resolvem o problema. São eles: $\overline{P'Q'}$ e $\overline{P''Q''}$, como mostra a figura 5.

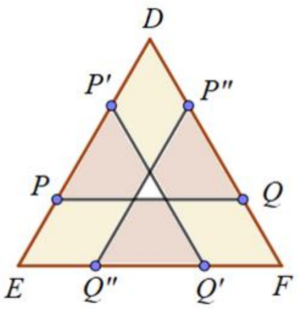


Figura 5

Outro curioso resultado que também pode ser demonstrado em relação à figura 5 é o de que os três segmentos traçados decompõem o triângulo *EDF* em três losangos congruentes, três trapézios isósceles congruentes e um triângulo equilátero. Tente demonstrar.

Resolvido o problema com o uso de segmentos de retas, é natural que nos interesse saber se tal segmento, de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{2}$, é a menor linha possível que divide a área do triângulo *EDF* ao meio. Surpreendentemente a menor linha não é um segmento de reta, mas sim uma curva, que encontraremos com a ajuda problema isoperimétrico dual.

O problema será analisado por meio da investigação de três casos. No caso A, a curva une dois lados distintos do triângulo; no caso B, a curva começa e termina no mesmo lado do triângulo e, no caso C, a curva não toca nenhum dos lados do triângulo, como mostra a figura 6.

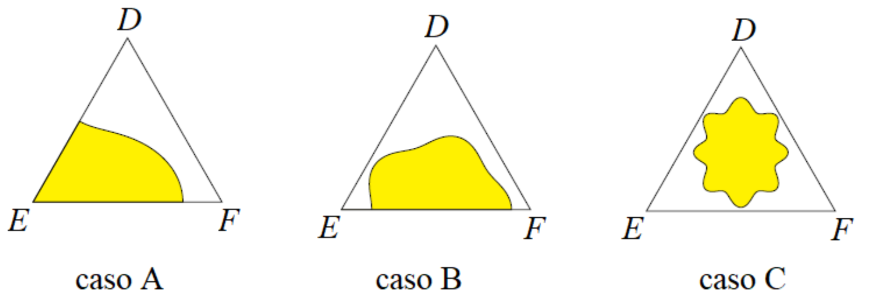


Figura 6

Nos casos A e B, juntando-se adequadamente seis e dois triângulos idênticos, respectivamente, as linhas se transformam em curvas fechadas contidas no interior de um hexágono regular e de um losango. De acordo com a solução do dual do problema isoperimétrico, dentre todas as curvas com mesma área da curva formada, a de menor perímetro sempre será uma circunferência, como mostra a figura 7.

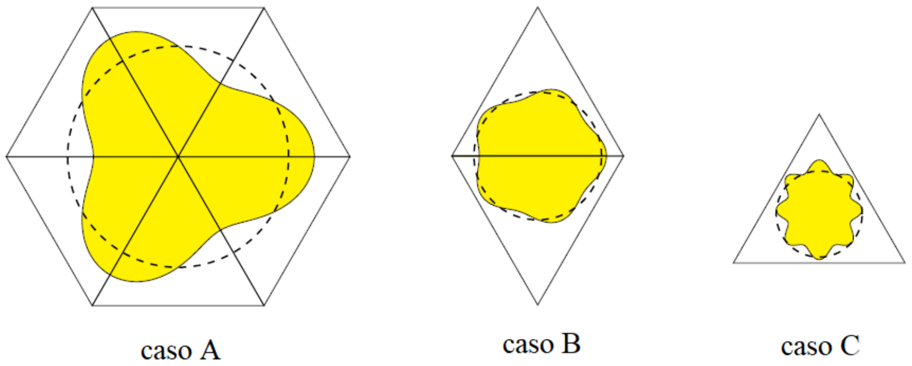


Figura 7

Resta-nos calcular e comparar as medidas de 1/6 da circunferência do caso A, 1/2 da circunferência do caso B e a circunferência inteira do caso C. O menor dos três comprimentos indicará a curva mais curta que resolve nosso problema. As contas a seguir indicam que o caso A é o vencedor.

Caso A:

Temos $\pi r^2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{\pi^2}}$.

O comprimento de 1/6 da circunferência será $\frac{1}{6} \times 2\pi \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{\pi^2}} \approx 0,673$.

Caso B:

Temos $\pi r^2 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{\pi^2}}$.

O comprimento de meia circunferência será $\frac{1}{2}\times 2\pi \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{\pi^2}} \approx 1{,}166.$

Caso C:

Temos $\pi r^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{4\pi^2}}.$

O comprimento da circunferência será $2\pi \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{4\pi^2}} \approx 1{,}649.$

Na figura 8, temos $PQ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707 > \mathrm{med}\left(MN\right) \approx 0{,}673$, sendo que o arco de circunferência MN é a menor curva que divide a área do triângulo EDF ao meio.

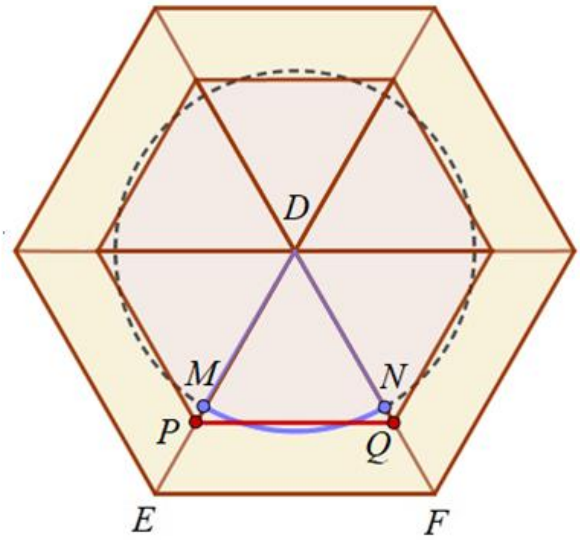


Figura 8

Power Point da Vídeo-aula

Desigualdade isoperimétrica

Prof. José Luiz Pastore Mello

Janeiro 2024

Desigualdade isoperimétrica

Problema

Dado um comprimento $L > 0$, encontrar, dentre todas as curvas do plano de comprimento L, aquela que engloba a maior área.

Dual

Dada uma área $A > 0$, encontrar, dentre todas as curvas do plano que englobam esta área, a que tem menor perímetro.

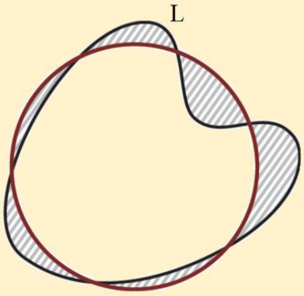
Contexto mítico em Eneida, de Virgílio (século I a.C.)

Mapa medieval de Cartago

Gravura de 1630, Matthäus Merien

Desigualdade isoperimétrica

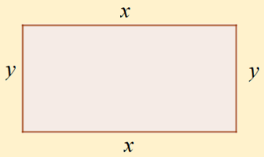
A desigualdade entre o comprimento L de uma curva fechada de uma região plana e sua área A é dada por $4\pi A \leq L^2$. A igualdade ocorre quando a curva fechada é um círculo.



	L	A	$4\pi A \leqslant L^2$
ℓ 	3ℓ	$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$	$\pi \leqslant 3\sqrt{3} \approx 5{,}20$
ℓ 	4ℓ	ℓ^2	$\pi \leqslant 4$
ℓ 	5ℓ	$\frac{5\ell^2}{4 \operatorname{tg} 36°}$	$\pi \leqslant 5 \operatorname{tg} 36° \approx 3{,}63$
ℓ 	6ℓ	$\frac{3\sqrt{3}\,\ell^2}{2}$	$\pi \leqslant 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$

Problema 1

Dado um retângulo de perímetro L, determine suas dimensões para que a área A seja a maior possível.

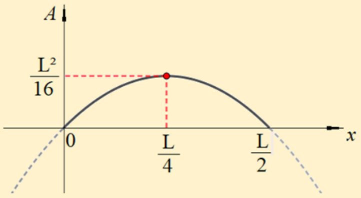


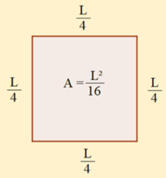
$$\begin{cases} 2x + 2y = L \xrightarrow{\cdot x} 2x^2 + 2xy = xL \quad (1) \\ xy = A \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1):

$$2x^2 + 2A = xL$$

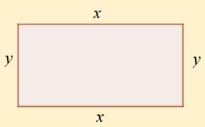
$$A = -x^2 + \frac{L}{2}x$$





Problema 1 (outra solução)

Dado um retângulo de perímetro L, determine suas dimensões para que a área A seja a maior possível.



$$\begin{cases} 2x + 2y = L \rightarrow x + y = \frac{L}{2} \\ xy = A \end{cases}$$

Sendo a, b, c, d números positivos com $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $ac > bd$.

Exemplo:

Como $2 > 1$ e $4 > 3$, temos $\underbrace{2 \cdot 4}_{8} > \underbrace{1 \cdot 3}_{3}$

Obs.

$-1 > -2$ e $-3 > -4$

$\underbrace{(-1)(-3)}_{3}$ não é maior do que $\underbrace{(-2)(-4)}_{8}$

Como x são números não negativos, temos:

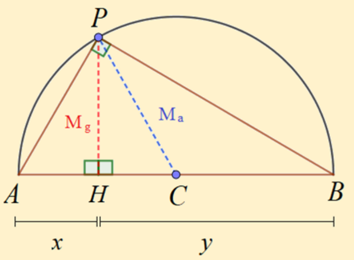
$$\frac{L}{2} \geq x \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{L}{2} \geq y \geq 0$$

$$\boxed{\frac{L^2}{4} \geq xy = A}$$

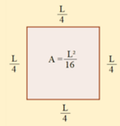
Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\boxed{\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}}$$

$$\left(M_a = M_g \text{ quando } x = y\right)$$



Como x e y são números não negativos e $x + y = \frac{L}{2}$, temos:



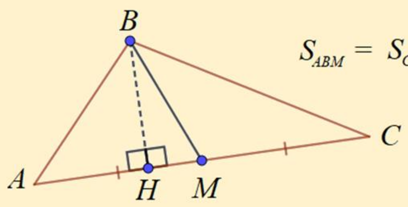
$$\frac{L}{4} \geq \sqrt{xy} \quad \text{e} \quad \frac{L^2}{16} \geq xy = A$$

A área máxima, $\frac{L^2}{16}$, ocorre quando $x = y = \frac{L}{4}$

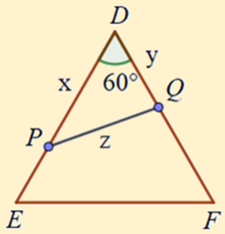
Problema 2

Qual é o segmento de reta mais curto que divide a área de um triângulo equilátero ao meio?

Propriedade da mediana de um triângulo qualquer:



$$S_{ABM} = S_{CBM}$$



$$S_{DPQ} = A_{EPQF} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{DPQ} = \frac{x \cdot y \cdot \operatorname{sen} 60°}{2}$$

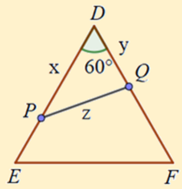
$$\frac{x \cdot y \cdot \operatorname{sen} 60°}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \qquad \boxed{xy = \frac{1}{2}}$$

Aplicando a lei dos cossenos no ΔDPQ:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 60°$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \qquad \boxed{z^2 = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}}$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad xy = \frac{1}{2}$$



Somando e subtraindo 2xy do lado direito da primeira igualdade, temos:

$$z^2 = x^2 - 2xy + y^2 - \frac{1}{2} + 2xy$$

$$z^2 = (x - y)^2 + \frac{1}{2}$$

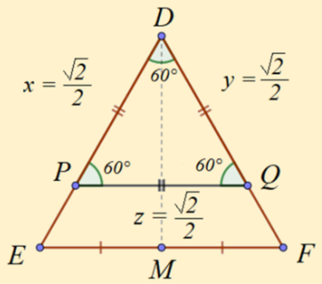
$$z = \sqrt{(x - y)^2 + \frac{1}{2}}$$

O valor mínimo de z ocorre quando $x = y$, portanto:

1) $\overline{PQ} \,//\, \overline{EF}$

2) ΔDPQ é equilátero

3) $x = y = z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

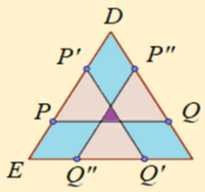


$$S_{DPQ} = A_{EPQF} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

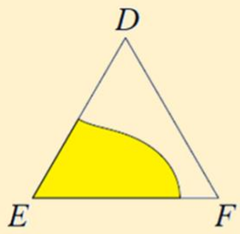
$$\frac{PQ^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow PQ = x = y = z = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$PQ = \frac{\sqrt{2}}{2} < DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

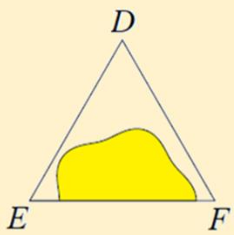
As três soluções do problema, por simetria rotacional:



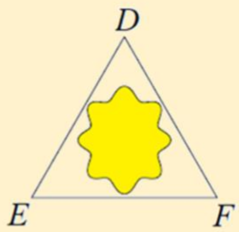
Problema 3
Qual é a linha mais curta que divide a área de um triângulo equilátero ao meio?



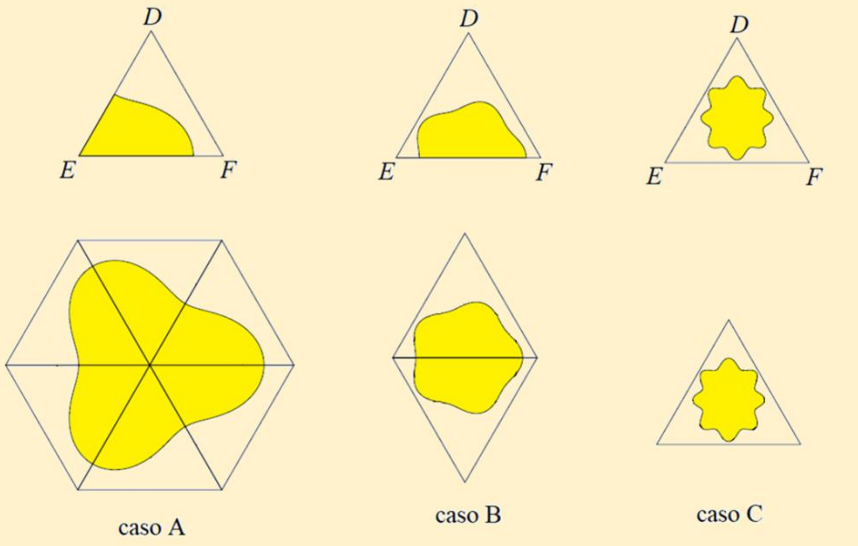
caso A



caso B

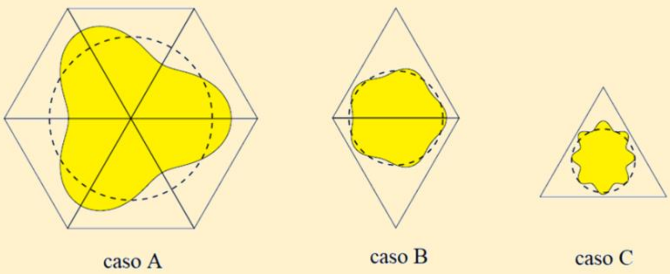


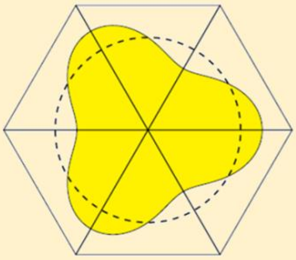
caso C



Desigualdade isoperimétrica (Dual)

Dentre todas as curvas com mesma área da curva formada, a de menor perímetro será uma circunferência.



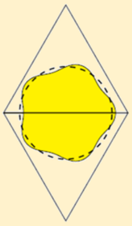


caso A

$$\pi r^2 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{\pi^2}}$$

Comprimento da linha :

$$\frac{1}{6} \cdot 2\pi \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{\pi^2}} \approx 0,673$$

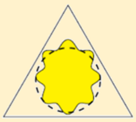


caso B

$$\pi r^2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{\pi^2}}$$

Comprimento da linha:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{\pi^2}} \approx 1,166$$



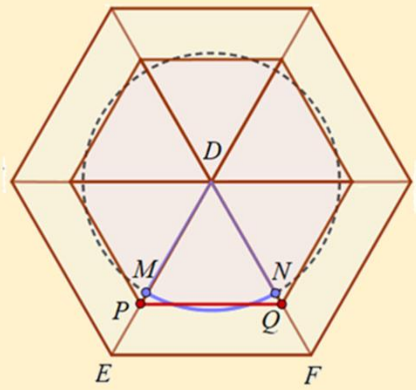
caso C

$$\pi r^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{8\pi}} \approx 0,263$$

Comprimento da linha :

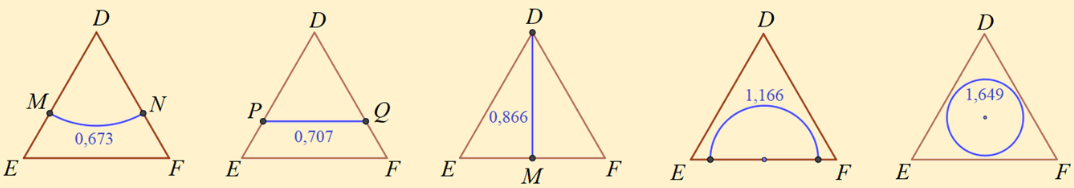
$$2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{8\pi}} \approx 1,649$$

Estrada Dona Castorina, 110 Jardim Botânico - CEP 22460-320 Rio de Janeiro, RJ - Brasil Phone: +55 21 2529-5275
www.impa.br



$$PQ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 > \text{med}\left(\widehat{MN}\right) \approx 0,673$$

Conclusão



Caso A < Segmento de reta < Mediana < Caso B < Caso C

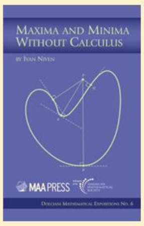
Bibliografia sugerida

KLASER, P. K., TELICHEVESKY, M. ***O problema isoperimétrico***. VI Colóquio de Matemática da Região Sul, RS/FURG, 2016.

PDF disponível em: https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2021/10/o-problema-isoperimetrico_ebook.pdf

NIVEN, I. ***Maxima and Minima without Calculus***. The Dolciani Mathematical Exposition, vol. 6, MAA Press, 1981.

PDF disponível em: http://www.ams.org/books/dol/006/dol006-endmatter.pdf



Referência bibliografia

[1] KLASER, P. K., TELICHEVESKY, M. *O problema isoperimétrico*. IV Colóquio de Matemática da Região Sul, Rio Grande/RS, FURG, 2016. PDF disponível em: https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2021/10/o-problema-isoperimetrico_ebook.pdf

[2] NIVEN, I. *Maxima and Minima without Calculus*. The Dolciani Mathematical Expositions, vol. 6, MAA, 1981. PDF disponível em: http://www.ams.org/books/dol/006/dol006-endmatter.pdf