PAPMEM – 2024 – Janeiro

Problemas de Contagem, de A a Z.

Carlos Nehab

Informações Gerais

A palestra aborda uma discussão dos principais conceitos do universo da *Contagem*, bem como a análise de inúmeros problemas, suas soluções e a análise de erros usuais, seja na aplicação dos *princípios de contagem*, seja na própria *modelagem* do problema.

Alguns temas adicionais, relevantes para o universo da *Contagem,* complementam a palestra e foram abordados à parte (pela limitação do tempo da *palestra*), quais sejam:

- **Aulas / Vídeos de Combinatória do PAPMEM [2001 – 2024]**
  É realizada uma curadoria de todos os vídeos que incluam conceitos e/ou exercícios relacionados à combinatória, disponibilizados pelo IMPA no projeto PAPMEM, o que facilitará enormemente a consulta aos vídeos
- **BNCC e Aspectos Combinatórios**
  As habilidades descritas na BNCC, relacionadas ao tema de *Contagem*, são listadas e comentadas.
- **Dificuldade no Ensino/Aprendizagem em Combinatória**.
  Discutem-se os principais resultados de diversos artigos relacionados ao tema.

Os materiais associados a esses temas complementares (bibliografia, textos) serão armazenados no ***Google Drive*** (na pasta da palestra propriamente dita) e os 'pequenos' vídeos complementares serão armazenados no canal do autor no *Youtube*, ***Canal Carlos Nehab***, na *playlist* PAPMEM.

Lembramos que TODOS os materiais (cópias dos slides, bibliografia sugerida e arquivos complementares), das palestras já proferidas pelo autor no PAPMEM (listadas a seguir), estão disponibilizados em pastas individuais, no endereço do *Google Drive* já citado: ***Google Drive***.

2024 – Jan – *Problemas de Contagem, de A a Z.*
2022 – Jul – *BNCC: a importância da análise de padrões geométricos e aritméticos no desenvolvimento da cognição matemática.*
2022 – Jan – *Ferramentas digitais - mudança de paradigma no ensino-aprendizagem?*
2021 – Jul – *Descartes discute relação com a BNCC.*
2021 – Jan – *Pensamento Multiplicativo e a BNCC***.**
2020 – Jan – *Oficinas para o Ensino Fundamental.*
2019 – Jul – *Uso de Planilhas no Ensino Médio* (2 de 2).
2019 – Jan – *Uso de Planilhas no Ensino Médio* (1 de 2).

Na plataforma do IMPA, o link

https://impa.br/videos/#ProgramadeAperfeicoamentoparaProfessoresdeMatematicadoEnsinoMedio

remete a todos os vídeos do PAPMEM, de 2001 até a presenta data.

Seguem-se os 'slides' da palestra propriamente dita: '*Problemas e Contagem, de A a Z*'.

Bom proveito!

Problemas de Contagem, de A a Z

Carlos Nehab

Problemas de Contagem, de A a Z

PARTE I Palestra

1. Conceitos Básicos
2. Exercícios × Análise de Erros

PARTE II Assuntos Complementares

3. Curadoria Aulas/Vídeos PAPMEM [2001 – 2024] – Combinatória
4. BNCC e Aspectos Combinatórios
5. Ensino/Aprendizagem em '*Combinatória*' – dificuldades

Parte I
1. Conceitos Básicos

Conceitos Básicos

- Cardinalidade × Bijeção
- Princípio da Adição
  - Partição
- Princípio da Multiplicação Morgado
  - Par Ordenado
  - Produto Cartesiano
- *Listas e Subconjuntos*

Conceitos Básicos

Cardinalidade

Big-Bang da Contagem !

- Dois conjuntos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ possuem a mesma ***cardinalidade*** se há uma ***bijeção*** entre eles.
- São chamados de conjuntos ***equipotentes***...
- Conjunto **finito** com $\boldsymbol{n}$ elementos?

  Se é ***equipotente*** ao conjunto $\{\mathbf{1};\ \mathbf{2};\ \ldots;\ \boldsymbol{n}\}$!

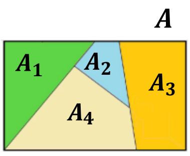
2004 – Jul – Números Cardinais – Elon

2023 – Jan – Problemas de Combinatória – PCezar

Partição

Uma coleção de subconjuntos de um conjunto $\boldsymbol{A}$ é uma partição se:

- *são* <u>disjuntos</u> dois a dois;
- sua *<u>união</u>* é A.



Princípio da Adição

Gérard Vergnaud

Campos Conceituais

Em qualquer *partição* de um conjunto finito $\boldsymbol{A}$, a ***cardinalidade*** de $\boldsymbol{A}$ é igual à soma das cardinalidades dos conjuntos da partição.

Na figura, teríamos:

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{A_1}) + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{A_2}) + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{A_3}) + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{A_4})$$

Conceitos Básicos

Par Ordenado

EF05MA14 e 15

Utilidade

Jogando um dado cúbico e um dado tetraédrico, como representar o resultado indicado?

Conjunto? $\{4;2\} = \{2;4\}$

Notação $(4;\ 2) \neq (2;\ 4)$

$(a;\ b)$

1º 2º

***Propriedade pressuposta*!**

Se $(a;\ b) = (c;\ d)$ *então* $a = c$ e $b = d$ ...

Definição? [Kuratowski]

$$(a;\ b) = \{\ \{a\};\ \{a\ ;\ \}\ \}$$

Tente provar a propriedade 'pressuposta'...

$$\{\{a\};\{a;b\}\} = \{\{c\};\{c;d\}\} \implies a = c \ \text{ e } \ b = d$$

Produto Cartesiano $A \times B$

Relações

Funções

Conjunto de todos os pares ordenados $(a;\ b)$ com a em A e b em B:

$$A \times B = \{\ (x;\ y)\ |\ x \in A \ \text{ e } \ y \in B\ \}$$

Os 24 resultados?

$\{1;2;3;4;5;6\} \times \{1;2;3;4\} =$

$= \{\ (1;1);\ \ldots;\ (1;4);\ \ (2;1);\ \ldots;\ (2;4);$

$\ldots;\ (5;1);\ \ldots;\ (5;4);\ (6;1);\ \ldots;\ (6;4)\ \}$

Conceitos Básicos

Cardinalidade de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

Em $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, todo e qualquer elemento de $\boldsymbol{A}$ pode ser associado a todo e qualquer elemento de $\boldsymbol{B}$, então...

$$n(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = n(\boldsymbol{A}) \times n(\boldsymbol{B}).$$

Exemplo milenar de contagem...

EF04MA06 - EF04MA08

Um palhaço dispõe de $\mathbf{3}$ *camisas* e $\mathbf{4}$ *bermudas* distintas. De quantas ***formas*** ele pode se vestir?

Uma ***vestimenta*** é um par de escolhas: uma *camisa* e uma *bermuda*.

Podemos associar qq uma das **3** camisas com qq uma das **4** bermudas... **4 + 4 + 4**?

$$\boldsymbol{n}(\{c_1; c_2; c_3\} \times \{b_1; b_2; b_3; b_4\}) = \mathbf{3} \times \mathbf{4} = \mathbf{12}$$

Tabelas (de dupla entrada)

EF02MA22

EF03MA26 e 27

Tabuada!

×	1	2	3	4	5	..
1	1	2	3	4	5	..
2	2	4	6	8	10	..
3	3	6	9	12	15	..
4	4	8	12	16	20	..
5	5	10	15	20	25	..
:	:	:	:	:	:	

$\mathbf{3} \times \mathbf{1} = 3$

$\mathbf{3} \times \mathbf{2} = 6$

$\mathbf{3} \times \mathbf{3} = 9$

$\mathbf{3} \times \mathbf{4} = 12$

$\mathbf{3} \times \mathbf{5} = 15$

$\mathbf{3} \times \mathbf{6} = 18$

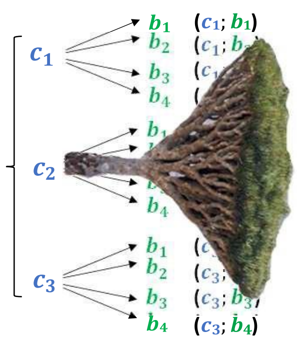
: :

Conceitos Básicos

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ e tabela (palhaço)...

$A \setminus B$	b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	$(c_1; b_1)$	$(c_1; b_2)$	$(c_1; b_3)$	$(c_1; b_3)$
c_2	$(c_2; b_1)$	$(c_2; b_2)$	$(c_2; b_3)$	$(c_2; b_3)$
c_3	$(c_3; b_1)$	$(c_3; b_2)$	$(c_3; b_3)$	$(c_3; b_3)$

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ e árvores... (ou diagrama?)



Há uma correspondência biunívoca entre os *caminhos* na árvore e as '*vestimentas*' (os pares ordenados)?

Conceitos Básicos

Princípio da Multiplicação

Morgado Vergnaud

Se desejamos tomar duas *decisões* sucessivas, tais que:

- há $\boldsymbol{p}$ maneiras de tomar a 1ª decisão;
- para qualquer uma dessas $\boldsymbol{p}$ maneiras de tomar a 1ª decisão, há sempre $\boldsymbol{q}$ maneiras de tomar a 2ª decisão,...

Então, o número de formas de tomar as duas decisões, sucessivamente, é igual a $\boldsymbol{pq}$.

Decisões independentes?

O PM **NÃO** exige que a 2ª decisão seja independente da 1ª decisão, mas que a ***quantidade*** de formas de tomar a 2ª decisão, ela sim, ***seja independente*** da forma como foi tomada a 1ª decisão.

Exemplo ilustrativo

Quantos são os naturais de 2 dígitos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4?

$\underbrace{\quad}_{d}\ \underbrace{\quad}_{u}$ $\boxed{4 \times 3 = 12}$

- *1ª decisão*: escolha do algarismo das *dezenas*;
- *2ª decisão*: escolha do algarismo das unidades, que **DEPENDE** do algarismo das dezenas escolhido.

Mas a **quantidade de escolhas** para o algarismo das unidades **NÃO DEPENDE** da escolha do algarismo das dezenas!

Conceitos Básicos

Exemplo ilustrativo (continuação)

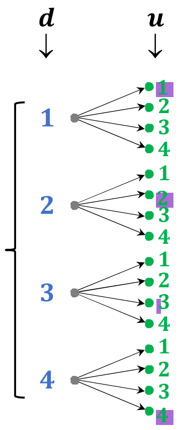
Quantos são os naturais de 2 dígitos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4?

Sem restrições !

$\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{1}; \boldsymbol{2}; \boldsymbol{3}; \boldsymbol{4}\}$

$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{1}; \boldsymbol{2}; \boldsymbol{3}; \boldsymbol{4}\}$

$d \backslash u$	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44



Com a restrição !

$d \backslash u$	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44

Conceitos Básicos

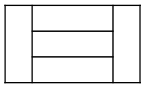
Exercícios **PAPMEM anteriores**

1. Quantos são os naturais de três dígitos **DISTINTOS** (ou não)? E naturais pares?

   2001 – Jan – Combinatória I – Morgado

   2002 – Jul – Combinatória I – PCezar

2. De quantos formas a bandeira pode ser pintada, se dispomos de cinco cores e regiões adjacentes devem ter cores distintas?

   2010 – Jul – Combinatória – PCezar

3. De quantas maneiras podemos colocar n objetos em fila? $P_n = n!$

   2001 – Jan – Combinatória II – Morgado

   2010 – Jul – Combinatória – PCezar

4. Dado um conjunto com n elementos, quantos são seus subconjuntos com p elementos?

   $$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots[n-(p-1)]}{p(p-1)\ldots 1}$$

   p parcelas

   p parcelas

   2001 – Jan – Combinatória II – Morgado

   2010 – Jul – Combinatória – PCezar

   2012 – Jul – Combinatória – Luciano

   [Simulação – Par Ordenado]

Parte II

Exercícios × Análise de erros

Jogos

Dominó**, **Trix** e **Set

Dominó

No jogo de dominó usual, como sabemos, cada peça contém dois dentre 7 símbolos (por exemplo *0 a 6 pontinhos*) *sendo permitida* a repetição de um mesmo símbolo em uma mesma peça.

a) Use um argumento combinatório para determinar qual o número máximo de peças desse jogo.

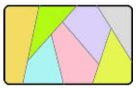
Análise Combinatória e Probabilidade
Morgado, Pitombeira, PCezar, PJFernandes

---

a.1) Enumerar na *marra*?
Ou de forma sistemática?

0 ?	**?** = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	⇒ 7 possib.
1 ?	**?** = 1, 2, 3, 4, 5, 6	⇒ 6 possib.
2 ?	**?** = 2, 3, 4, 5, 6	⇒ 5 possib.
...		...

Princípio da Adição?



Peças

Foi determinada uma **partição** do conjunto das peças?

Descreva tal *partição*....

Os 7 'grupos' formados, $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_6$ contém as peças cujo **menor valor** é igual a 0, 1, 2, ..., 6, respectivamente...

Qde peças: $7 + 6 + \cdots + 1 = \mathbf{28}$

$1 + 2 + \cdots + 7$

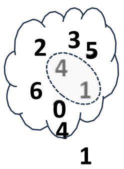
Dominó (a.2)

No jogo de dominó usual, como sabemos, cada peça contém dois dentre 7 símbolos (por exemplo *0 a 6 pontinhos*) *sendo permitida* a repetição de um mesmo símbolo em uma mesma peça.

a) Use um argumento combinatório para determinar qual o número máximo de peças desse jogo.

---

a.2) Associar as peças a subconjuntos de { 0; 1; ... ; 6 } com 2 elementos...



Contagem de subconjuntos:
Como se conta?

$$C_7^2 = \binom{7}{2} = \frac{7 \bullet 6}{2 \bullet 1} = 21$$

Há uma correspondência *biunívoca* nessa **modelagem**?

Hummm! Erro na Modelagem!
Peças duplas!

Vou usar o *Princípio da Adição*?
Qual partição ?...

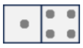
Qde peças: 21 + **7** = **28**

Dominó (a.3)

No jogo de dominó usual, como sabemos, cada peça contém dois dentre 7 símbolos (por exemplo *0 a 6 pontinhos*) <u>*sendo permitida*</u> a repetição de um mesmo símbolo em uma mesma peça.

a) Use um argumento combinatório para determinar qual o número máximo de peças desse jogo.

a.3) Associar as peças à escolha de 2 dígitos, dentre 0, 1, 2, ..., 6.



$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\quad 7 \times 7 = 49?$

Há correspondência <u>*biunívoca*</u> *nessa modelagem?*

Restrição?
Ordem?

*O que é **uma peça***

É um par ordenado?

É um subconjunto de { 0; 1; ...; 6}, com 1 ou 2 elementos?

*O que faz o **Produto Cartesiano?***

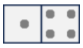
	0	1	2	3	4	5	6
0	00	01	02	03	04	05	06
1	10	11	12	13	14	15	16
2	20	21	22	23	24	25	26
3	30	31	32	33	34	35	36
4	40	41	42	43	44	45	46
5	50	51	52	53	54	55	56
6	60	61	62	63	64	65	66

Dominó (a.3)

No jogo de dominó usual, como sabemos, cada peça contém dois dentre 7 símbolos (por exemplo *0 a 6 pontinhos*) <u>*sendo permitida*</u> a repetição de um mesmo símbolo em uma mesma peça.

a) Use um argumento combinatório para determinar qual o número máximo de peças desse jogo.

a.3) Associar as peças à escolha de 2 dígitos, dentre 0, 1, 2, ..., 6.



$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\quad 7 \times 7 = 49?$

Há correspondência <u>*biunívoca*</u> *nessa modelagem?*

Restrição?
Ordem?

*O que é **uma peça***?

É um par ordenado?

É um subconjunto de { 0; 1; ...; 6}, com 1 ou 2 elementos?

O que ocorre quando o <u>modelo</u> *está **ERRADO**?*

Peças não-duplas computadas 2 vezes!

Corrigindo (*Princípio da Adição...*) :

$$\frac{7 \times 7 - 7}{2} + 7 = \frac{42}{2} + 7 = 28 \quad \text{ou}$$

$$\frac{7 \times 7 + 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

Dominó (b.1)

No jogo de dominó usual, como sabemos, cada peça contém dois dentre 7 símbolos (por exemplo *0 a 6 pontinhos*) <u>sendo permitida</u> a repetição de um mesmo símbolo em uma mesma peça.

a) Use um argumento combinatório para determinar qual o número máximo de peças desse jogo.

b) De quantas maneiras é possível selecionar 2 peças, dentre todas as peças do jogo, de tal forma que sejam peças '***concatenáveis***' ?

b.1) Duas etapas? Escolhe a 1ª peça e depois a 2ª?

1ª peça	*2ª peça*	
$\boxed{a \mid b}$	$\boxed{a \mid ?}$	6 escolhas
28 escolhas	$\boxed{b \mid ?}$	6 escolhas

$28 \times (6 + 6) = 336$?

Dividindo o problema...

P. Adição?
Partição?
Se $a = b$?

- **1ª peça não dupla: 21 escolhas**
  2ª peça: **12 escolhas**
- **1ª peça é dupla: 7 escolhas**
  2ª peça: **6 escolhas**

Total: $(21 \times 12) \oplus (7 \times 6) = \mathbf{294}$

Concatenação é par ordenado de peças? Ou conjunto de 2 peças?

$\boxed{5 \mid 3}$ e $\boxed{3 \mid 3}$

$\boxed{3 \mid 3}$ e $\boxed{3 \mid 5}$

Resposta
$294/2 = \mathbf{147}$

Dominó (b.2)

No jogo de dominó usual, como sabemos, cada peça contém dois dentre 7 símbolos (por exemplo *0 a 6 pontinhos*) <u>sendo permitida</u> a repetição de um mesmo símbolo em uma mesma peça.

a) Use um argumento combinatório para determinar qual o número máximo de peças desse jogo.

b) De quantas maneiras é possível selecionar 2 peças, dentre todas as peças do jogo, de tal forma que sejam peças '*concatenáveis*' ?

b.2)

Teatrinho Usual

Nehabiiiiiiiiiiiiiii!

Fala, Juquinha!

"Eu fiz assim:
– Escolhendo 3 n^{os} eu formo peças concatenáveis ***sem** peças duplas*; escolhendo 2 n^{os} eu formo as peças concatenáveis ***com** peças duplas*. Molinho!"

- *Para cada* **3** *n^{os} escolhidos,* $\boldsymbol{a}$*,* $\boldsymbol{b}$ *e* $\boldsymbol{c}$*, distintos, há* **?** *<u>concatenações</u>* ***sem*** *peça dupla.*

$\boxed{a \mid c}$ $\boxed{c \mid b}$ $\boxed{a \mid b}$

$$C_7^3 \times 3 = 35 \times 3 = \mathbf{105}$$

- *Para cada* **2** *n^{os} escolhidos,* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$*, distintos, há* **?** *<u>concatenações</u>* ***com*** *peça dupla.*

$\boxed{a \mid b}$ $\boxed{a \mid a}$ $\boxed{b \mid b}$

$$C_7^2 \times 2 = 21 \times 2 = \mathbf{42}$$

$$\boldsymbol{Qde} = 105 + 42 = \mathbf{147}$$

Partição?

Dominó (b.2.1)

No jogo de dominó usual, como sabemos, cada peça contém dois dentre 7 símbolos (por exemplo *0 a 6 pontinhos*) sendo permitida a repetição de um mesmo símbolo em uma mesma peça.

a) Use um argumento combinatório para determinar qual o número máximo de peças desse jogo.

b) De quantas maneiras é possível selecionar 2 peças, dentre todas as peças do jogo, de tal forma que sejam peças '*concatenáveis*' ?

b.2.1) Outra forma de calcular as concatenações sem peça dupla.

? a	a b	b ?
5 *escolhas*	C_7^2	5 *escolhas*

$$C_7^2 \times \underline{(5+5)} = 21 \times 10 = 210$$

Somou? É partição? Mas....

5 3	3 4
	a b

5 3	3 4
a b	

$$Qde = \frac{210}{2} + 42 = 147$$

Dominó (c.1)

No jogo de dominó usual, como sabemos, cada peça contém dois dentre 7 símbolos (por exemplo *0 a 6 pontinhos*) sendo permitida a repetição de um mesmo símbolo em uma mesma peça.

a) Use um argumento combinatório para determinar qual o número máximo de peças desse jogo.

b) De quantas maneiras é possível selecionar 2 peças, dentre todas as peças do jogo, de tal forma que sejam peças '*concatenáveis*' ?

c) De quantas maneiras diferentes posso distribuir 7 peças do jogo para cada um dentre 4 jogadores?

d) De quantas maneiras diferentes posso criar 4 grupos de 7 peças cada um?

c.1) Dispomos de um conjunto de 28 peças e ... cada jogador recebe um subconjunto de 7 dessas peças! Escolhas sucessivas?

$$\underbrace{C_{28}^7}_{1^\circ} \quad \underbrace{C_{21}^7}_{2^\circ} \quad \underbrace{C_{14}^7}_{3^\circ} \quad \underbrace{C_7^7}_{4^\circ}$$

$$\frac{28!}{\cancel{21}!\cdot 7!} \times \frac{\cancel{21}!}{\cancel{14}!\cdot 7!} \times \frac{\cancel{14}!}{7!\cdot 7!} \times 1 = \frac{28!}{(7!)^4}$$

Nehabiiiiii ! Não tem que multiplicar por *fatorial de 4* ? São 4 jogadores que podem ser '***embaralhados***' !

Dominó (c.1)

No jogo de dominó usual, como sabemos, cada peça contém dois dentre 7 símbolos (por exemplo *0 a 6 pontinhos*) <u>*sendo permitida*</u> a repetição de um mesmo símbolo em uma mesma peça.

a) Use um argumento combinatório para determinar qual o número máximo de peças desse jogo.

b) De quantas maneiras é possível selecionar 2 peças, dentre todas as peças do jogo, de tal forma que sejam peças '*concatenáveis*' ?

c) De quantas maneiras diferentes posso distribuir 7 peças do jogo para cada um dentre 4 jogadores?

---

c.1) Dispomos de um conjunto de 28 peças e ... cada jogador recebe um subconjunto de 7 dessas peças! Escolhas sucessivas?

$$\underbrace{C^7_{28}}_{1^\circ}\ \underbrace{C^7_{21}}_{2^\circ}\ \underbrace{C^7_{14}}_{3^\circ}\ \underbrace{C^7_{7}}_{4^\circ}$$

$$\frac{28!}{\cancel{21!}\bullet 7!}\times\frac{\cancel{21!}}{\cancel{14!}\bullet 7!}\times\frac{\cancel{14!}}{7!\bullet 7!}\times 1=\frac{28!}{(7!)^4}$$

Como calcular $28!/(7!)^4$ se $28!$ vale **304.888.344.611.713.860.501.504.000.000 ?**

30 algarismos !

Dominó (c.1)

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA

WolframAlpha

304888344611713860501504000000 **Valor exato! 30 algarismos ... com 6 zeros**

	A	B
1	=Fatorial(28)	304.888.344.611.714.000.000.000.000.000
2	=Fatorial(7)	5.040
3	=B1/(B2)^4	472.518.347.558.400
4		
5	=COMBIN(28;7)	1.184.040
6	=COMBIN(21;7)	116.280
7	=COMBIN(14;7)	3.432
8	=B5*B6*B7	472.518.347.558.400

Erro! Precisão do Excel...

Valor exato. Porque?

Dominó (c.2)

No jogo de dominó usual, como sabemos, cada peça contém dois dentre 7 símbolos (por exemplo *0 a 6 pontinhos*) <u>*sendo permitida*</u> a repetição de um mesmo símbolo em uma mesma peça.

a) Use um argumento combinatório para determinar qual o número máximo de peças desse jogo.

b) De quantas maneiras é possível selecionar 2 peças, dentre todas as peças do jogo, de tal forma que sejam peças '*concatenáveis*' ?

c) De quantas maneiras diferentes posso distribuir 7 peças do jogo para cada um dentre 4 jogadores?

---

c2) Multiconjunto ...

2012 – Jul – Combinatória – Luciano

As peças são numeradas de 1 a 28, e postas na mesa. Cada jogador coloca seu nome nas peças escolhidas...

D	A_1	B	A_2	...	A_7	E	C
1	2	3	4		26	27	28

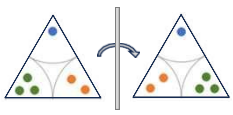
$\boldsymbol{N} = 28! \implies$ Repetição!

$$\implies \boldsymbol{N} = \frac{28!}{7!\,7!\,7!\,7!}$$

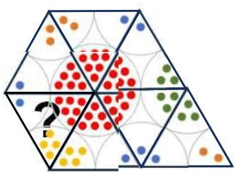
Trix

Um jogo similar ao dominó, chamado *Trix,* é formado de peças no formato de triângulos equiláteros iguais, com <u>*marcas*</u> representando 3 diferentes n^{os} de **1** a **6** nos vértices.

Não é permitida a repetição de <u>marcas</u> (n^{os}) em uma mesma peça, mas peças '*espelhadas*' são peças diferentes.



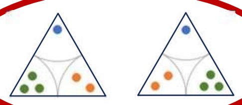
Exemplo de uma sequência de <u>jogadas</u>...



Trix (arg1)

Um jogo similar ao dominó, chamado *Trix,* é formado de peças no formato de triângulos equiláteros iguais, com *marcas* representando 3 diferentes n^{os} de **1** a **6** nos vértices.

Não é permitida a repetição de marcas (n^{os}) em uma mesma peça, mas peças '*espelhadas*' são peças diferentes.



Analise os dois **argumentos** a seguir, que visam calcular o número máximo de *peças desse jogo*!

Arg 1. Dado o conjunto constituído dos *números* de 1 a 6, identificamos as peças com os *subconjuntos* de

Nº de subconjuntos de 3 elementos do conjunto {1; 2;...; 6}?

$$C_6^3 = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$$

Esses subconjuntos de números estão em correspondência *biunívoca* com as peças?

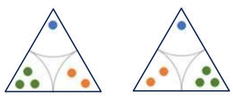
Hummmm!

Resposta: $20 \times 2 = \mathbf{40}$ ...

Trix (arg2)

Um jogo similar ao dominó, chamado *Trix,* é formado de peças no formato de triângulos equiláteros iguais, com *marcas* representando 3 diferentes n^{os} de **1** a **6** nos vértices.

Não é permitida a repetição de marcas (n^{os}) em uma mesma peça, mas peças '*espelhadas*'



Analise os dois **argumentos** a seguir, que visam calcular o número máximo de *peças desse jogo*!

Arg 1. Dado o conjunto constituído dos *números* de 1 a 6, identificamos as peças com os *subconjuntos* de {1; 2; ...; 6 }, com três elementos ...

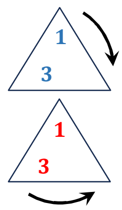
Arg 2. Identificamos as peças com os números de 3 algarismos diferentes, formados a partir dos 'dígitos' de 1 a 6 ...

$\underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4} \implies \boldsymbol{Qde} = 6.5.4 = 120$!

Há uma correspondência *biunívoca* nessa modelagem?

Hummm! O cálculo pressupõe ordem?

1	2	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1
2	1	3
1	3	2

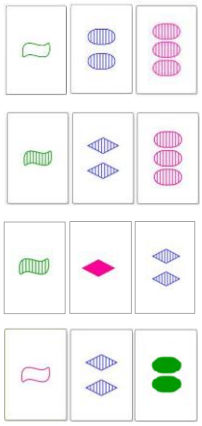


$\left({}^{120}/_{6}\right) \times \mathbf{2} = \mathbf{40}$

Set

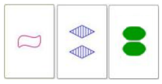
Um jogo de cartas onde cada carta é identificada por **quatro** características:

- Há, em cada carta, uma ***quantidade*** *igual a* *<u>1</u>*,(uma), *<u>2</u>* (duas) ou *<u>3</u>* (três) **figuras geométricas iguais** entre si,
- cuja ***forma*** de cada figura é, ou uma *<u>onda</u>*, ou um *<u>losango</u>* ou uma *<u>elipse</u>* ,
- com uma das seguintes ***cores***: *<u>verde</u>*, *<u>violeta</u>* ou *<u>azul</u>*,
- mas cuja ***pintura*** é apenas no *<u>contorno</u>*, sob a forma de *<u>hachuras</u>* ou uma pintura *<u>sólida</u>*.

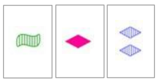


Um **conjunto de 3 cartas** é chamado de um '**set**', se, nas 3 cartas, cada uma das 4 características são, ou todas *<u>iguais</u>* ou todas *<u>diferentes</u>*.

Quantidades: todas diferentes
Formas: todas diferentes
Cores: todas diferentes
Pintura: todas iguais



Somente as quantidades não atendem à condição.



Somente as cores atendem ás exigências.

Set

Compreendida a formação das cartas?

a) Use um argumento combinatório para determinar qual o número máximo de cartas desse jogo.

b) Quantos são os subconjuntos de três cartas que formam um ***Set***?

---

a) 1ª Etapa: Escolha da ***quantidade***.

- *1, 2, 3*

2ª Etapa: Escolha da ***forma.***

- *onda, losango, elipse*

3ª Etapa: Escolha da ***cor.***

- *verde, azul, violeta*

4ª Etapa: Escolha da ***pintura.***

- *contorno, hachuras, sólida*

Há alguma restrição nas escolhas de cada uma das etapas?

$$\underbrace{3}_{\text{Quantidade}} \times \underbrace{3}_{\text{Forma}} \times \underbrace{3}_{\text{Cor}} \times \underbrace{3}_{\text{Pintura}} = 81$$

Cada escolha produz o *mesmo número* de alternativas para cada uma das escolhas da etapa anterior!
E é até, independente da etapa anterior!

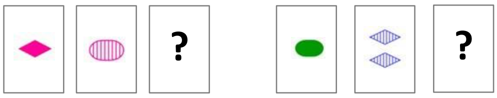
Set

a) Use um argumento combinatório para determinar qual o número máximo de cartas desse jogo.

b) Quantos são os subconjuntos de três cartas que formam um ***Set***?

---

b) Hum... Para ser um *Set*....



Em duas cartas escolhidas, para cada uma de suas características, só podem ocorrer duas situações:

- *A particular característica é **diferente** nas duas cartas*: Então a 3ª carta deve possuir a 3ª possível escolha.
- *A particular característica é **igual** nas duas cartas:* Então a 3ª carta deve possuir a mesma característica.

Então. dadas **duas cartas arbitrárias**, a **terceira** carta do ***Set*** está definida !

Então, há quantos **pares** de cartas formamos a partir das 81 cartas?

$$C_{81}^{2} = \frac{81 \bullet 80}{2} = 3.240$$

Hummmm. Um ***Set*** é um conjunto com 3 cartas **X**, **Y** e **Z** ! Mas foi contado três vezes!

Resposta: $3240/3 = \mathbf{1080}$