Mágica e Dedução na Sala de Aula

Prof. Pedro Malagutti

pedro.malagutti@ufscar.br

Departamento de Matemática UFSCar

INTRODUÇÃO

Nesta aula serão comentados alguns problemas envolvendo o raciocínio lógico e apresentadas algumas mágicas que envolvem dedução. O objetivo principal é explorar algumas técnicas de lógica matemática com o intuito de abrir caminhos para estudos mais avançados nessa área do conhecimento, sem, entretanto, fugir de saberes tradicionalmente estudados no Ensino Médio. O que se pretende, especificamente, é seduzir o estudante com aporias, isto é, com dificuldades aparentemente insolúveis, para atraí-los ao mundo da dedução, procurando, desse modo, aumentar o interesse pelo estudo da Matemática e suas aplicações.

Frequentemente os alunos da escola básica são confrontados com problemas que possuem solução única, o que os leva à crença de que todos os problemas de Matemática têm essa característica determinística. Entretanto, as ideias matemáticas são muito mais ricas e apresentar aos estudantes problemas diferenciados e instigantes pode desenvolver o espírito crítico, fundamental para uma educação de qualidade. Com isso em mente, apresentaremos inicialmente quatro tipos de problemas que envolvem algum tipo de lógica, diferentes dos exercícios rotineiros presentes na maioria dos manuais didáticos.

Um problema possível solucionado com lógica

Existe um prêmio em uma das caixas e somente um rótulo é correto. Onde estará o prêmio?

Esse problema exige apenas leitura e organização lógica. As possibilidades estão expostas no quadro abaixo:

	a frase da caixa 1 seria	a frase da caixa 2 seria	a frase da caixa 3 seria
Se o prêmio estivesse na caixa 1	verdadeira	verdadeira	falsa
Se o prêmio estivesse na caixa 2	falsa	falsa	verdadeira
Se o prêmio estivesse na caixa 3	falsa	verdadeira	verdadeira

Somente a opção da segunda linha satisfaz o enunciado e, portanto, o prêmio está na caixa 2.

Um problema que parece impossível, mas que pode ser resolvido com lógica

Complete as lacunas com números naturais de modo a tornar verdadeira a seguinte frase:

“Nesta frase, o número de ocorrências de 0 é __, de 1 é __ e de 2 é __.”

Ao tentarmos preencher as lacunas, nos deparamos com uma situação aparentemente contraditória, observe:

Nesta frase, o número de ocorrências de 0 é _1_, de 1 é __ e de 2 é __.

Nesta frase, o número de ocorrências de 0 é _1_, de 1 é _2_ e de 2 é __.

Nesta frase, o número de ocorrências de 0 é _1_, de 1 é _2_ e de 2 é _?_.

Não importa o que se escreva na última lacuna, 2 ou 3, a frase fica falsa.

Entretanto, o problema é claramente solúvel; basta não seguir a ordem linear de preenchimento; veja:

Nesta frase, o número de ocorrências de 0 é _1_, de 1 é __ e de 2 é __.

Nesta frase, o número de ocorrências de 0 é _1_, de 1 é __e de 2 é _1_.

Nesta frase, o número de ocorrências de 0 é _1_, de 1 é _3_e de 2 é _1_.

Um problema logicamente impossível

A sentença abaixo é verdadeira ou falsa?

“ESTA SENTENÇA CONTÉM SEIS PALAVRAS”

É claramente falsa pois contém 5 palavras. Portanto, nos moldes da lógica clássica, sua negação deve ser verdadeira, ou seja, deve ser verdadeira a seguinte sentença:

“ESTA SENTENÇA NÃO CONTÉM SEIS PALAVRAS”

Só que ela contém seis palavras. Trata-se de um paradoxo. A Lógica nos revela que há desafios realmente insolúveis.

Problemas no limbo – conjecturas

Escolha um número inteiro positivo qualquer N (a semente) e siga as instruções abaixo:

- Se N for par, divida-o por 2, obtendo N/2.
- Se N for ímpar, multiplique-o por 3 e adicione 1, obtendo 3N + 1.

Repita as operações acima um número muito grande de vezes.

Exemplo 1: 1 → 3 x 1 + 1 = 4 → 4 ÷ 2 = 2 → 2 ÷ 2 = 1 → 4 → 2 → 1 ...

Exemplo 2: 5 → 3 x 5 + 1 = 16 → 16 ÷ 2 = 8 → 8 ÷ 2 = 4 → 4 ÷ 2 = 2 → 2 ÷ 2 = 1 → 4 → 2 → 1 ...

Conjectura de Colatz

“Começando com qualquer número inteiro positivo, a aplicação repetida das regras acima levará sempre ao ciclo 1 → 4 → 2 → 1”

Por quê? Ninguém ainda sabe se isso é verdadeiro ou falso. Quer tentar provar?

Os quatro problemas acima nos fazem refletir sobre os fundamentos da lógica matemática. Historicamente, desde os tempos de Aristóteles (384 - 322 a.C), a lógica clássica está assentada em três princípios:

Princípio da não contradição: “Algo não pode ser simultaneamente verdadeiro e falso”.

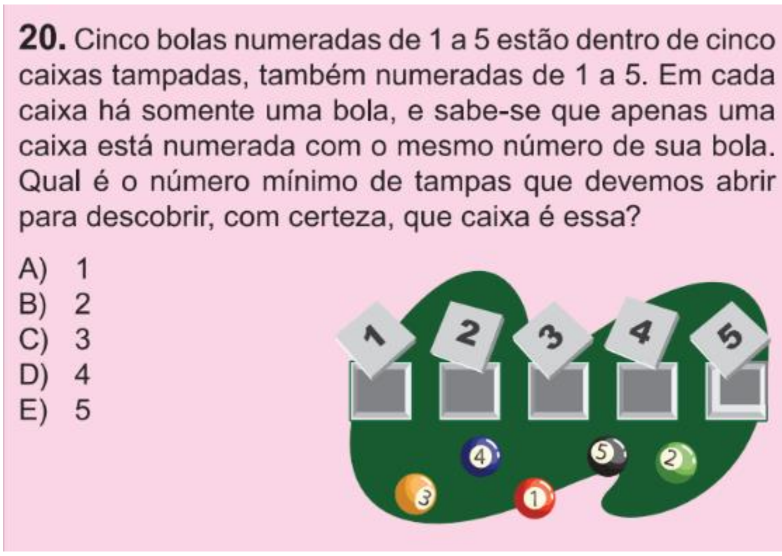
Princípio do terceiro excluído: “Ou algo é verdadeiro ou é falso, não há uma terceira opção”.

Princípio da reflexividade da igualdade: “Qualquer coisa deve ser igual a si mesma”.

Para uma visão panorâmica do uso desses princípios na linguagem moderna da Lógica e suas aplicações em sala de aula assista os vídeos do Professor Antônio Branco - PAPMEM 2019-2020.

Um problema da OBMEP envolvendo Lógica

A OBMEP sempre apresenta bonitos problemas envolvendo lógica. O problema a seguir apareceu na 1a fase Nível 2 de 2019:



20. Cinco bolas numeradas de 1 a 5 estão dentro de cinco caixas tampadas, também numeradas de 1 a 5. Em cada caixa há somente uma bola, e sabe-se que apenas uma caixa está numerada com o mesmo número de sua bola. Qual é o número mínimo de tampas que devemos abrir para descobrir, com certeza, que caixa é essa?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Trata-se de um belo problema em que é muito fácil, sem os devidos cuidados, dirigir-se a um caminho que leva a uma solução errada.

O raciocínio a seguir, embora errôneo, é bem sutil e pode levar à solução falsa de que apenas as aberturas de duas caixas já seriam suficientes para a descoberta da caixa contendo bola com número coincidente com seu próprio número. Vejamos:

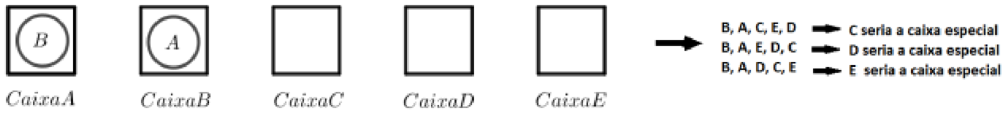
Se, após abrir a 1ª caixa, não encontrarmos a bola com seu próprio número, com certeza o número da bola que aparecer revelará que a caixa com esse número também não conterá a bola com seu próprio número. Podemos descartar a caixa que foi aberta e essa caixa recém citada. Restarão 3 caixas e, usando o mesmo raciocínio, abrimos uma 2ª caixa dentre as três restantes; ou encontramos a bola na caixa de mesmo número que ela ou descartamos mais duas caixas e, portanto, nesse caso, a última caixa não descartada conterá a bola com o mesmo número dela.

Por que isso está errado? O descarte de caixas sem saber de seu conteúdo não é uma boa estratégia. Considere as duas distribuições de bolas em caixas abaixo:

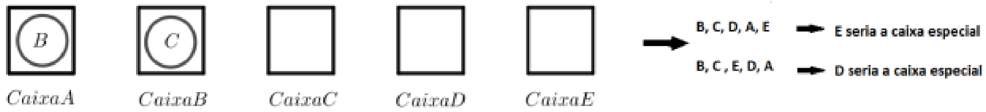
Se abrirmos as caixas 1 e 3 não poderemos distinguir qual das duas possibilidades acima ocorre, pois não sabemos o conteúdo da caixa 2.

Apresentamos a seguir a solução que está no site da OBMEP:

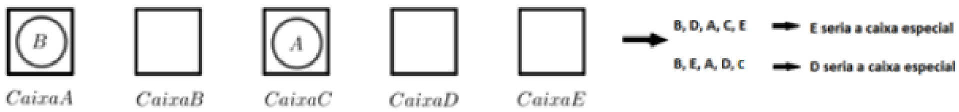
QUESTÃO 20
ALTERNATIVA C
Inicialmente vamos mostrar que abrir duas caixas não é suficiente. Vamos chamar as caixas de A,B,C,D e E e as bolas com os mesmos nomes para que possamos abrir hipóteses sem perder generalidade e chamaremos de caixa *especial* a caixa com bola de mesma numeração da caixa.
Após abrir a primeira caixa (A) duas coisas podem acontecer: encontrarmos a bola A e teremos descoberto a caixa especial. Então vamos nos concentrar no caso em que a bola na caixa A seja uma bola diferente de A, que chamaremos de B.
Hipótese 1: Abrir a caixa B (é uma hipótese ruim, pois já temos certeza de que a caixa B não é a especial, mas, ainda assim, vamos analisar para esgotar as possibilidades).
Se na caixa B estiver a bola A, então ainda não se pode saber qual é a caixa especial, basta ver no diagrama abaixo que haveria três possibilidades para as outras 3 caixas e cada uma dessas possibilidades apresenta uma caixa especial diferente :



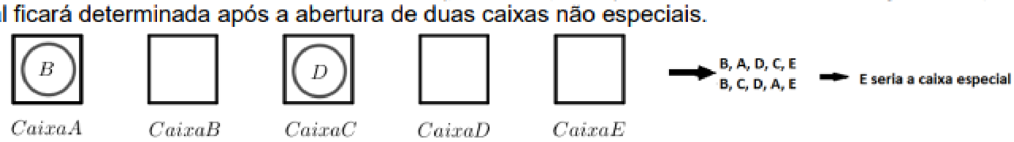
Se na caixa B estiver uma bola diferente de A e de B, podemos, sem perda de generalidade, chamá-la de C, então com certeza a caixa especial terá que ser a D ou a E, mas as duas coisas ainda poderiam acontecer como descrito no diagrama abaixo e, portanto, não seria possível determinar a caixa especial abrindo só duas caixas.



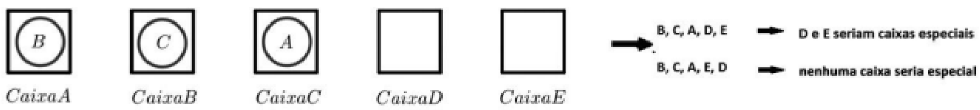
Hipótese 2: Após abrir a caixa A, escolhemos uma caixa diferente da B para abrir. Separaremos essa hipótese em dois casos: se a bola nessa caixa for A ou se a bola nessa caixa for diferente de A e de C.
Se a bola na caixa C for A, então cairemos nos dois casos do diagrama abaixo, e não será possível determinar se a caixa especial é a D ou a E:



Se a bola na caixa C for diferente de A e de C (por exemplo, D), esta será a única situação em que a caixa especial ficará determinada após a abertura de duas caixas não especiais.



Com isso, concluímos que, de fato, a abertura de duas caixas não garante a determinação de qual é a especial.
Vamos mostrar agora que com a abertura de 3 caixas podemos garantir qual é a caixa especial.
Imaginemos que 3 caixas foram abertas e que nenhuma delas era a especial.
Se chamarmos essas 3 caixas de A,B e C, então é impossível que as 3 bolas A, B e C já tenham aparecido nas 3 primeiras caixas, pois isso obrigaria as caixas D e E a serem ambas especiais ou ambas não especiais.



Portanto, em uma das 3 caixas não especiais que já foram abertas tem que aparecer a bola de uma das outras duas caixas que automaticamente poderemos garantir que também não será especial. Com isso, só sobrará uma caixa para ser a especial.
Podemos, portanto, garantir que a quantidade mínima de caixas que precisam ser abertas para descobrirmos qual caixa contém a bola de igual número é 3.

A mágica do objeto escondido

Uma dupla é convidada a participar da mágica. Eles combinam entre si, em segredo, que um falará sempre a verdade e o outro sempre mentirá. O mágico não fica sabendo do combinado.

O mágico oferece a um dos elementos da dupla um objeto, o qual um dos dois ficará de posse, escondendo-o em suas costas, sem que o mágico veja.

Com apenas uma pergunta a um dos participantes, o mágico descobrirá com quem está o objeto escondido. Uma possível pergunta é a seguinte:

"O objeto está com quem está mentindo?"

Há quatro possibilidades, as quais passaremos a analisar:

A pergunta foi feita para a pessoa que fala a verdade e o objeto está com ela. Resp.: NÃO

A pergunta foi feita para a pessoa que fala a mentira e o objeto está com ela. Resp.: NÃO

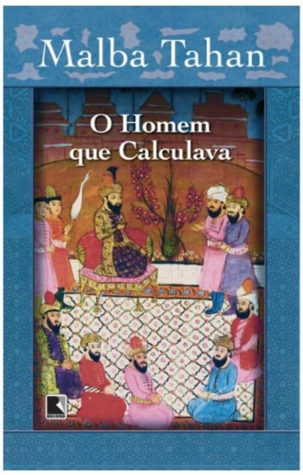
A pergunta foi feita para a pessoa que fala a verdade e o objeto não está com ela. Resp.: SIM

A pergunta foi feita para a pessoa que fala a mentira e o objeto não está com ela. Resp.: SIM

Conclusão: se a resposta for NÃO a pessoa que respondeu está com objeto escondido; se for SIM, o objeto está com a outra pessoa.

A cor dos olhos de 5 escravas

Esse problema encerra o livro *O Homem que Calculava* de Malba Tahan.



33. No qual o califa Al-Motacém oferece ouro e palácios ao calculista. A recusa de Beremiz. Um pedido de casamento. O problema dos olhos pretos e azuis. Como Beremiz determinou, pelo cálculo, a cor dos olhos de cinco escravas.

Apresentamos a seguir um interessante artigo da Revista do Professor de Matemática (RPM nº. 7) acerca dessa obra.

Malba Tahan e as escravas de olhos azuis *Zoroastro Azambuja Filho*

Na seção de livros de uma loja de departamento, deparei-me outro dia, por acaso, com um exemplar da 27ª. edição de "O Homem que Calculava" de Malba Tahan. (Editora Record, Rio de Janeiro, 1983). Quarenta anos depois de o ter lido pela primeira vez, não resisti à tentação nostálgica de reviver antigas emoções. Comprei-o e o reli. Para os mais jovens leitores da RPM, talvez tenha alguma utilidade dizer algumas palavras sobre esse autor e sua obra.

Malba Tahan, pseudônimo do Professor Júlio César de Mello e Souza, exerceu uma influência singular entre os estudantes da minha geração. Para os não-especialistas, em particular para a imprensa, ele foi, enquanto viveu, o maior matemático do Brasil. Esse julgamento, que pouco tinha a ver com a realidade, resultava principalmente do grande número de livros que ele escreveu (quase uma centena), muitos deles sobre Matemática. Eram livros de divulgação, escritos num estilo claro, simples e agradável, peculiar ao autor. Neles, a ênfase maior era dada à História da Matemática e a exposições sobre tópicos elementares, inclusive da Matemática que fora moderna no princípio deste século, com destaque para aspectos pitorescos, paradoxais, surpreendentes ou controversos.

Embora os livros de Malba Tahan tenham sido criticados por tratarem seus assuntos de forma superficial, por conterem alguns erros sérios de concepção, por serem, em grande parte, meras compilações e coletâneas de citações, é forçoso reconhecer que alguns desses livros tiveram grande aceitação, o que significa que havia no país um numeroso público, na maioria jovem, ávido por conhecer melhor a Matemática, sua história e seus desenvolvimentos. Principalmente pessoas ansiosas por ouvir alguém falar da Matemática sob forma menos árida e antipática do que seus tradicionais e severos professores, com seus igualmente áridos compêndios. Essa necessidade foi suprida, devemos admitir, com bastante sucesso, por Malba Tahan.

Olhando em retrospecto, podemos hoje achar que esse papel de propagandista da Matemática deveria ter sido ocupado por alguém com melhor treinamento profissional, isto é, com mais competência científica. Alguém como Amoroso Costa, talvez. Mas Amoroso morreu cedo e, mesmo assim, em que pese da sua vasta cultura, o país ainda não estava maduro para um divulgador do seu nível.

Malba Tahan surgiu na hora certa, com o nível e o estilo que minha geração queria. Se o analisarmos como matemático, estaremos olhando para o lado errado. Mas, se mudarmos o enfoque, podemos vê-lo mais adequadamente, como jornalista, divulgador, antologista ou contador de histórias. Como contador de histórias, ele tem grandes momentos e "O Homem que Calculava" é o seu melhor trabalho. Em suas 27 edições, "O Homem que Calculava" muito fez para estimular o cultivo da arte de resolver problemas, incutir o amor pela Matemática e destacar aspectos nobres e estéticos desta Ciência. Eu era menino quando minha irmã mais velha ganhou um exemplar desse livro corno presente de seu professor. Lembro-me que o devorei avidamente. E ao relê-lo agora, não obstante os muitos *calos* que me deixou o longo exercício do magistério, ainda senti algumas das mesmas emoções de outrora, diante de certos trechos de rara beleza.

Como toda obra, o livro tem seus pontos altos e outros nem tanto. Curiosamente, as coisas que mais me agradaram na leitura de hoje foram aquelas das quais guardava ainda alguma lembrança desde a primeira vez.

"O Homem que Calculava" é a história de Beremiz Samir um fictício jovem persa, hábil calculista, versado na Matemática da época contado por um amigo, admirador e companheiro de viagens, uma espécie de Dr. Watson muçulmano. Em certas passagens, a narrativa das proezas matemáticas de Beremiz nos diferentes lugares por onde passava nos faz lembrar o Evangelho segundo São Marcos. O relato, feito por um maometano ortodoxo, é cheio de respeitosas evocações divinas e pontilhado pela linguagem pitoresca dos árabes de novela. Isto é feito com graça e dá um colorido especial ao conto.

Beremiz Samir resolve problemas curiosos, alguns propostos, outros acontecidos naturalmente em suas andanças. Faz também discursos eloquentes sobre o amor à Deus, a grandeza moral e a Matemática. E dá aulas de Matemática bastante inspiradas à filha de um xeique, com a qual vem a casar-se no fim da história. Para que se tenha uma ideia dos problemas tratados, descrevemos o primeiro, o segundo e o último deles.

No primeiro problema, Beremiz e seu amigo, viajando sobre o mesmo camelo, chegam a um oásis, onde encontram três irmãos discutindo acaloradamente sobre como dividir uma herança de 35 camelos. Seu pai estipulara que a metade dessa herança caberia ao filho mais velho, um terço ao do meio e um nono ao mais moço. Como 35 não é divisível por 2, nem por 3, nem por 9, eles não sabiam como efetuar a partilha. Para espanto e preocupação do amigo, Beremiz entrega seu camelo aos 3 irmãos, a fim de facilitar a divisão. Os 36 camelos são repartidos, ficando o irmão mais velho com 18, o do meio com 12 e o mais moço com 4 camelos. Todos ficaram contentes porque esperavam antes receber 17 e meio, e, 11 e dois terços e 3 e oito nonos respectivamente. E o melhor: como 18 + l2 + 4 = 34, sobraram 2 camelos, a saber, o que fora emprestado e mais um. Todo mundo saiu ganhando. Explicação: *um* meio mais *um* terço mais *um* nono é igual a 17/18, logo da menor do que 1. Na partilha recomendada pelo velho árabe sobrava um resto, do que se na aproveitaram Beremiz e seu amigo.

O segundo problema é urna pequena delícia. Beremiz e seu amigo, a caminho de Bagdá. socorrem no deserto um rico xeique, que fora assaltado, e com ele repartem irmãmente sua comida, que se resumia a 8 pães, 5 de Beremiz e 3 do amigo. Chegados ao seu destino, o xeique os recompensa com oito moedas de ouro: 5 para Beremiz e 3 para o amigo. Todos então se surpreendem com os suaves protestos de Beremiz. Segundo este, a maneira justa de repartir as 8 moedas seria dar 7 a ele e 1 apenas ao amigo! E prova: durante a viagem, cada refeição consistia em dividir um pão em 3 partes iguais e cada um dos viajantes comia uma delas. Foram consumidos ao todo 8 pães, ou seja, 24 terços, cada viajante comendo 8 terços. Destes, 15 terços foram dados por Beremiz, que comeu

8, logo contribuiu com 7 terços para a alimentação do xeique. Por sua vez, o seu amigo contribuiu com 3 pães, isto é, 9 terços, dos quais consumiu 8; logo, participou apenas com 1 terço para alimentar o xeique. Isto justifica a observação de Beremiz.

No final, porém, o homem que calculava, generosamente, ficou com apenas 4 moedas, dando as 4 restantes ao amigo.

O último problema do livro se refere a 5 escravas de um poderoso califa. Três delas tem olhos azuis e nunca falam a verdade. As outras duas tem olhos negros e só dizem verdade. As escravas se apresentaram com os rostos cobertos por véus e Beremiz foi desafiado a determinar a cor dos olhos de cada uma, tendo o direito a fazer três perguntas, não mais do que uma pergunta a cada escrava. Para facilitar as referências, chamaremos as 5 escravas A, B, C, D e E.

Beremiz começou perguntando à escrava A: "Qual a cor dos seus olhos?" Para seu desespero, ela respondeu em chinês, língua que ele não entendia, por isso protestou. Seu protesto não foi aceito, mas ficou decidido que as respostas seguintes seriam em árabe. Em seguida, ele perguntou a B: "Qual foi a resposta que A me deu?" B respondeu: "Que seus olhos eram azuis". Finalmente, Beremiz perguntou a C: "Quais as cores dos olhos de A e B?" A resposta de C foi: "A tem olhos pretos e B tem olhos azuis". Neste ponto, o homem que calculava concluiu. "A tem olhos pretos, B azuis, C pretos, D azuis e E azuis". Acertou e todos ficaram maravilhados.

Explicação para a dedução de Beremiz: Em primeiro lugar, se perguntarmos a qualquer das cinco escravas qual a cor dos seus olhos, sua resposta só poderá ser "Negros", tenha ela olhos azuis ou negros, pois na primeira hipótese ela mentirá e na segunda dirá a verdade. Logo B mentiu e, portanto, seus olhos são azuis. Como C disse que os olhos de B eram azuis, C falou a verdade, logo seus olhos são negros. Também porque C fala a verdade, os olhos de A são negros; como somente duas escravas tem olhos negros, segue-se que os olhos de D e E são azuis.

Certamente Malba Tahan escolheu este caso para o fim do livro porque desejava encerrá-lo com chave de ouro, tal a beleza do problema. Podemos, entretanto, fazer três observações que reduzem bastante o brilho desse *"gran finale":*

1) O método usado por Beremiz não permite sempre resolver o problema. Ele acertou por mero acaso. Com efeito, se os olhos de A fossem azuis (admitindo ainda que B tenha olhos azuis e C negros), ele só poderia concluir que entre D e E, uma teria olhos azuis e a outra olhos negros. Mas não poderia dizer qual delas. Mais precisamente: o raciocínio utilizado por Beremiz permite determinar apenas as cores dos olhos de A, B e C. Por exclusão, conclui-se que D e E têm as cores que faltam, mas não se pode especificar a cor de cada uma quando essas cores forem diferentes.

2) Se Beremiz fosse mais esperto, encontraria um método infalível para determinar a cor dos olhos de cada uma das escravas *fazendo apenas uma única pergunta*! Bastava chegar junto a uma das escravas (digamos, A) perguntar: "Qual a cor dos olhos de cada uma de vocês?" Como há 3 escravas de olhos azuis e 2 de olhos negros, só haveria duas respostas

possíveis. Se A tivesse olhos negros, sua resposta mencionaria duas escravas de olhos negros três de olhos azuis e seria a resposta certa. Se A tivesse olhos azuis, sua resposta diria três escravas de olhos negros e duas de olhos azuis e, neste caso, bastariam inverter sua resposta para obter a verdade.

3) A solução de Beremiz e aquela dada em 2) acima fazem uso de uma informação aparentemente essencial: quantas escravas de olhos azuis e quantas de olhos negros existem no grupo. Suponhamos agora que essa informação seja omitida. Têm-se n escravas, cujos olhos podem ser azuis ou negros. As primeiras mentem sempre, as últimas nunca. Pode haver de 0 a n escravas de olhos azuis; consequentemente, o número de escravas de olhos negros também não é fornecido. *Mesmo assim, ainda é possível determinar a cor dos olhos de cada uma por meio de uma única pergunta!* Basta perguntar à escrava A o seguinte: “Se meu amigo lhe indagasse qual a cor dos olhos de cada uma das n, que lhe responderia você?”

A resposta de A para mim consistiria em atribuir a cada escrava uma cor de olhos. Pois bem, seja qual fosse a cor dos olhos de A, fosse ela mentirosa ou não, a cor dos olhos de cada escrava seria exatamente aquelas dada por sua resposta a mim.

Com efeito, apenas por uma questão de método vamos supor que A começasse sua resposta pela cor dos seus próprios olhos. Haveria então duas possibilidades quanto ao começo da resposta de A.

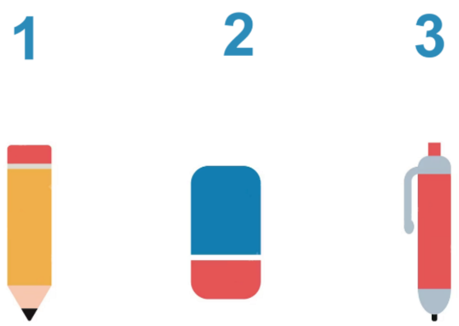
Primeira: “Eu diria ao seu amigo que meus olhos são negros, que os olhos de B são...etc”. Neste caso, A não me mente, porque ela só poderia dizer ao meu amigo que seus olhos são negros. Logo seus olhos são mesmo negros e sua resposta contém a verdade.

Segunda: “Eu diria ao seu amigo que meus olhos são azuis, que os de B são .... etc”. Então A é mentirosa, pois ela não poderia dizer a ninguém que seus próprios olhos são azuis. Portanto A mentiria ao meu amigo e me diria ao contrário, logo me contaria a verdade.

Apesar de ter estragado um pouco da festa de Beremiz com as escravas, espero ter deixado claro que me diverti lendo “O Homem que Calculava”, tanto agora como da primeira vez. A solução 3) foi por mim imaginada naquela época, embora as pessoas que me conhecem, ou que sabem a cor dos meus olhos, duvidem muito desta afirmação.

Mágica da permutação e dedução

O mágico coloca 3 objetos sobre uma mesa em posições numeradas, tal como no exemplo a seguir:



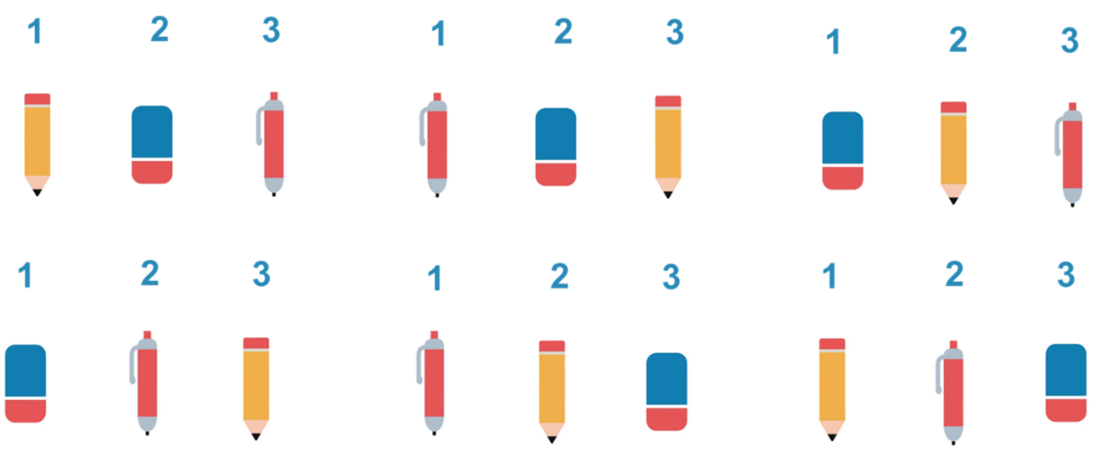
Chama um voluntário e diz a ele que sua tarefa será trocar os objetos de lugar, fazendo permutações, isto é, trocando dois objetos de lugar de cada vez.

1ª Etapa: O mágico fica de costas para a mesa e o voluntário começa a trocar os objetos de lugar, sempre mencionando as posições que estão sendo permutadas em cada passo. Por exemplo, se inicialmente o voluntário troca de lugar os objetos nas posições 1 e 3, ele diz "um e três". O voluntário deverá fazer muitas permutações desse tipo, sempre mencionando as posições de objetos permutados em cada passo.

2ª Etapa: Concluída a 1ª etapa, o mágico pede que o voluntário escolha, secretamente, um dos objetos sobre a mesa e que o memorize. Pede então que ele troque de lugar, sem mencionar suas posições, os outros dois objetos; isto é, escolhido um dos objetos, o voluntário fará então a troca de lugar dos outros dois objetos, em silêncio.

O mágico pede então que o voluntário faça mais algumas permutações, como anteriormente, isto é, "cantando" as posições dos pares de objetos que estão sendo permutados. Terminada esta segunda etapa, o mágico volta-se para os objetos sobre a mesa e indica, ao voluntário, o objeto escolhido por ele.

No final, deve ocorrer uma das seis possibilidades apresentadas abaixo:



Embora o mágico não saiba qual dessas possibilidades ocorre depois de todas as permutações feitas, ele conseguirá descobrir o objeto escolhido pelo voluntário, por meio de um raciocínio dedutivo.

Mas, como funciona o truque?

O mágico rastreia um dos objetos (por exemplo, a borracha) utilizando seu polegar e outros três dedos de sua mão. Desse modo, ele sabe, depois da 1ª etapa, onde a borracha foi parar. Na segunda etapa ele continua rastreando, como se a permutação feita em segredo não tivesse ocorrido.

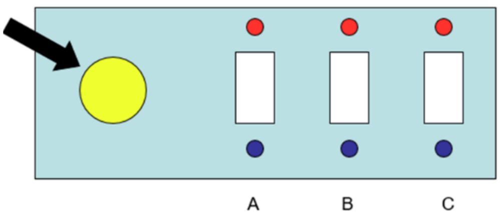
Concluídas as permutações, suponha que o polegar do mágico esteja em contato com o dedo que indique a posição 2. Ele dirige-se para a mesa e observa qual objeto está na posição 2. Se for a borracha, ele saberá que ela foi o objeto escolhido pelo voluntário. Se o objeto da posição 2 for outro, digamos a caneta, o mágico saberá que, na permutação secreta, a borracha e a caneta foram permutadas e concluirá que o objeto escolhido é, portanto, o terceiro objeto, o lápis.

Vejamos mais um exemplo. Suponha que o polegar do mágico esteja em contato com o dedo que indique a posição 1 e nessa posição esteja o lápis; isso significa que o lápis foi permutado com a borracha e, portanto, o objeto escolhido em segredo pelo voluntário é a caneta.

Desafio da caixinha com 3 botões

O mágico mostra uma caixinha com 3 botões e uma lâmpada. A lâmpada está inicialmente acesa e qualquer um dos botões pode apagar ou voltar a acender a lâmpada.

O mágico convida alguém da plateia para um desafio. Ele apaga a lâmpada e dá as duas primeiras chances à pessoa para acendê-la, acionando dois botões diferentes, um de cada vez. A terceira opção sempre é a do mágico. Por mais que a pessoa tente, o mágico invariavelmente vence o desafio.



Revelando a trapaça:

Os três botões estão ligados em série e a lâmpada só poderá acender ser os três estiverem na posição “LIGA”.

A	B	C	A e B e C
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

A	B	C	A e B e C
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Dedução com envelopes

São apresentados dois envelopes: um deles contém uma nota de dinheiro valiosa e o outro um papel em branco dobrado. Nesses envelopes estão escritas as seguintes frases:

Se a pessoa apresentar um argumento dedutivo correto, que prove onde está o dinheiro, poderá ficar com ele.

A frase no primeiro envelope é verdadeira ou falsa?

Se for verdadeira, ela mesmo nos que é falsa, uma contradição.

Se for falsa, a frase no segundo envelope é verdadeira; logo, o dinheiro só pode estar no primeiro envelope.

O primeiro envelope é aberto e o dinheiro não está lá. Que estranho…

Qual foi o erro no raciocínio?

A frase no envelope 1 não é verdadeira nem falsa. A frase no segundo envelope é falsa. Isso nos leva a rever os princípios da lógica clássica formulados por Aristóteles e aprofundar no estudo de deduções que convivam com contradições. Um longo caminho se abre.

ÚLTIMO EXEMPLO:

Será possível provar a seguinte afirmação?

"Se esta frase inteira é verdadeira, então esta aula nunca vai acabar"

Essa é uma afirmação do tipo *p* implica *q*, sendo *p* "esta frase inteira é verdadeira" e *q* "esta aula nunca vai acabar". Para prová-la devemos assumir que *p* é verdadeira e provar que *q* também é verdadeira. Ora, se *p* é verdadeira, a frase original completa é verdadeira e, portanto, *q* é verdadeira (pois ambas *p* e *p implica q* valem). Concluímos, então, que essa nossa aula nunca irá terminar. Desejo sinceramente que sim, que ela seja o início de uma longa caminhada.

Referências:

Mágicas, matemática e outros mistérios, Pedro Malagutti e João Sampaio, EDUFScar, 2011.

Mágicas com papel, Geometria e outros mistérios, Pedro Malagutti e João Sampaio, EDUFScar, 2015.

OBMEP - https://www.obmep.org.br/provas.htm

SBM, Revista do Professor de Matemática no. 7, Zoroastro Azambuja Filho, Malba Tahan e as escravas de olhos azuis.

O Homem que Calculava, Malba Tahan, 83ª. Edição, Editora Record, 2011, Rio de Janeiro.