Problemas Olímpicos de Matemática em Sala de Aula

Parte 2: Uma estratégia para engajar os alunos.

Prof. Luciano Monteiro de Castro
lucianogmcastro@gmail.com
@matematicamentexyz

Introdução

"A perseverança, a dedicação e a ordem no trabalho são qualidades indispensáveis para o estudo da matemática."

(Elon Lages Lima, Matemática e Ensino)

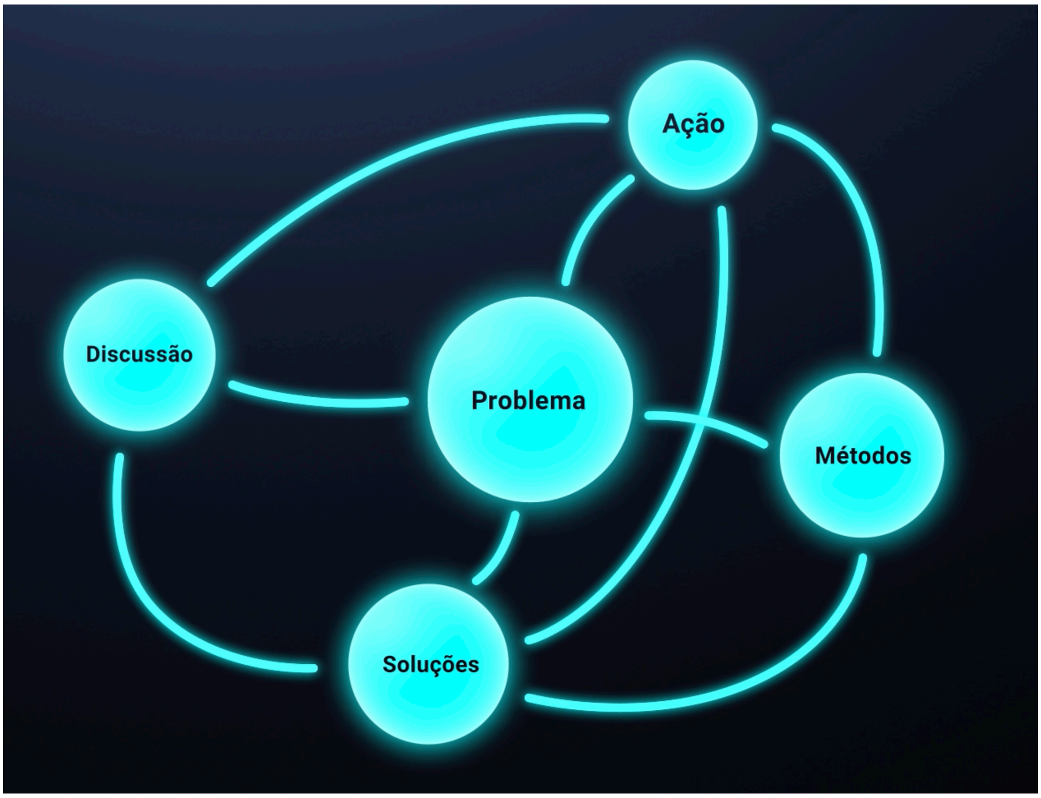
"É como essas estacas fundas que sustentam o edifício: seu destino é enterrar-se, aguentar sem aparecer; se alguma vez aparece, é porque o edifício desabou."

(Francisco José de Almeida, A Virtude da Ordem)

Nesta edição de janeiro de 2024 do PAPMEM vamos continuar desenvolvendo as ideias expostas na passada edição, de julho de 2023. Naquela ocasião nos concentramos nas principais motivações para usar problemas de olimpíada em sala de aula, e também procuramos responder a algumas objeções comuns, completando com alguns exemplos concretos.

Desta vez, vamos sugerir uma estratégia que pode ser utilizada para engajar os alunos em discussões produtivas para solução de problemas desafiadores.

Estratégia



Nossa sugestão é dividir a atividade em 5 etapas, que resumiremos com os títulos: Problema, Ação, Discussão, Soluções e Métodos.

1) Problema

Entender o problema é o primeiro passo. Idealmente, os alunos devem ler individualmente o enunciado e ter tempo suficiente para certificarem-se de que o entenderam. Nesta fase, alguns alunos se precipitam em fazer perguntas antes de terem tido um tempo razoável de reflexão, por isso o professor deve conter sua própria ansiedade e estimulá-los a lerem mais uma vez, com calma.

O professor pode fazer perguntas tanto para certificar-se de que os alunos realmente entenderam bem o problema, quanto para ajuda-los a pensar em suas próprias dúvidas. Muitas vezes é conveniente, nesta fase, sugerir exemplos, representações ou variações do problema.

2) Ação

Uma vez seguros de que o enunciado está bem compreendido, partimos para a ação. Isso significa não apenas pensar em maneiras para chegar a uma solução, mas principalmente ter uma postura ativa diante do problema, ao invés de ficar esperando alguma inspiração ou tentando lembrar de alguma fórmula ou método que possa ser útil.

A ação a que nos referimos pode sem dúvida ser mental, mas a maioria dos problemas requer também ações físicas, desde o simples desenhar ou escrever até a possível utilização de outros materiais físicos.

Esta etapa é o contraponto à reação mais comum entre alunos pouco acostumados a enfrentar desafios: “Eu não sei o que fazer, não tenho ideia.” Precisamos ajudá-los a lidar com essa sensação de forma proativa, adquirindo o hábito de buscar ativamente possíveis ações diante das dificuldades.

3) Discussão

Alunos e professores conversam sobre as ideias e os possíveis avanços na direção da solução. Surgem erros, muitas vezes até mais instrutivos do que as soluções, representando oportunidades para que os próprios colegas os identifiquem e corrijam.

O papel do professor deve ser observar e fazer intervenções pontuais, preferencialmente na forma de perguntas como, por exemplo: “Quem concorda com a afirmação do colega?”; “Por quê?”

Também o trabalho individual pode passar por esta etapa de discussão, quer seja simplesmente na forma de diálogo mental, como também se pode essencialmente “discutir” com um livro ou um vídeo, lendo ou assistindo pequenos trechos e parando para refletir, tentando completar o raciocínio, buscando alternativas e até mesmo erros ou imprecisões.

4) Soluções

Após agir e discutir sobre o problema, normalmente aparecerá uma ou mais soluções. Neste ponto é importante verificar cada passo, e como justifica-lo. Também devemos olhar para o conjunto completo dos passos e entender quais são essenciais e quais são secundários ou dispensáveis.

Perguntas úteis podem ser: “É possível verificar o resultado?”; “Podemos argumentar de forma mais simples em algum passo?”; “Sabemos justificar cada etapa da solução?”; “Conseguimos imaginar uma forma mais direta de chegar à conclusão?”

5) Métodos

De posse de uma ou mais soluções para o problema, é o momento de buscar generalizações ou sistematizações que nos permitam resolver outros problemas. Aqui o professor pode introduzir nomenclaturas, definições, fórmulas relacionadas ao que foi feito, talvez até apresentando algum contexto histórico.

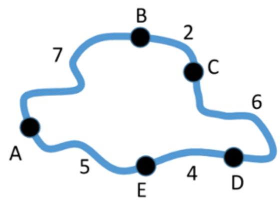
Quando o aluno entende a utilidade de um conceito, método ou fórmula na solução de um problema, fica mais motivado a aprendê-lo.

Alguns Exemplos

Apresentamos a seguir uma seleção de problemas propostos em recentes Olimpíadas de Matemática no Brasil. Ao selecionar problemas para uma aula, o professor deve levar em conta o nível da turma, pensando tanto nos alunos mais avançados como naqueles com mais dificuldades. É importante que haja desafios para que todos encontrem alguma dificuldade, mas que também todos encontrem algum problema acessível após algum esforço.

Exemplo 1 (Competição Canguru 2023, Nível P)

19. O MAPA MOSTRA 5 CIDADES **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, E OS COMPRIMENTOS DOS CAMINHOS ENTRE ELAS, EM QUILÔMETROS. SOMENTE 2 DESSAS CIDADES TÊM CAMINHOS COM COMPRIMENTOS IGUAIS ENTRE ELAS, NÃO IMPORTANDO QUAL DELES SEJA ESCOLHIDO. QUAIS SÃO ESSAS 2 CIDADES?

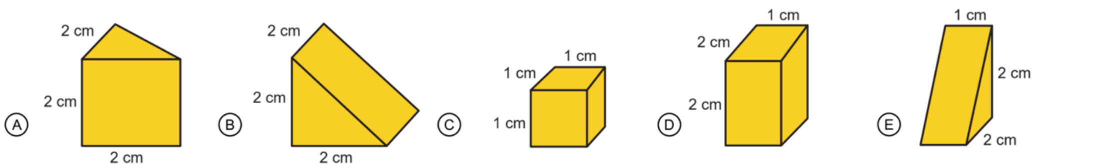


(A) **B** E **E** **(B)** **B** E **D** **(C)** **C** E **E** **(D)** **A** E **C** **(E)** **A** E **D**

Solução:
Somando todas as distâncias indicadas obtemos 7 + 2 + 6 + 4 + 5 = 24. Assim, procuramos duas cidades cujos caminhos tenham comprimento igual à metade de 24, 12. As únicas são B e E, já que 7 + 5 = 2 + 6 + 4 = 12.
Opção A.

Exemplo 2 (OBMEP Mirim 2023)

14. UM CUBO DE 2 CENTÍMETROS DE LADO FOI DIVIDIDO EM 4 PEÇAS IGUAIS. QUAL DAS ALTERNATIVAS ABAIXO PODE SER UMA DESSAS PEÇAS?

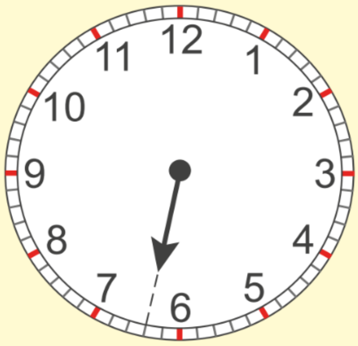


Solução:
A peça da opção A é metade do cubo, pois duas como ela podem ser obtidas com um corte plano perpendicular a uma face passando pela diagonal dessa face. Assim, a peça da opção E é metade da peça da opção A, bastando cortá-la por um plano paralelo às bases triangulares do prisma, cortando as arestas laterais ao meio. Isso significa que o cubo pode ser cortado em 4 peças iguais às da opção E, que é a correta. Nenhuma outra opção é válida, já que B é igual a A, C representa a oitava parte do cubo, e D é outra peça que é metade do cubo, agora cortando-o por um plano paralelo a uma face.
Opção E

Exemplo 3 (OBMEP 2023)

17. Paulinho tem um relógio que só tem o ponteiro das horas. Um dia ele saiu de casa pela manhã quando o ponteiro das horas apontava exatamente para o 32º minuto, conforme mostrado na figura. Ao voltar para casa à tarde, o ponteiro das horas apontava exatamente para o 11º minuto. Quanto tempo ele esteve fora de casa?

(A) 6h 32min
(B) 7h 24min
(C) 7h 39min
(D) 7h 48min
(E) 8h 21min



Solução:
Cada hora fica dividida em 5 partes iguais pelas marcas relativas aos minutos, logo cada intervalo entre duas dessas marcas corresponde a 60 / 5 = 12 minutos. Assim, ele saiu de casa 6:24 e voltou 14:12, ficando fora um total de 7h 48 min.
Opção D.

Exemplo 4 (OBMEP 2023, Nível 3)

1. Aninha tem nove cartões numerados de 1 a 9. Ela forma sequências com esses cartões colocando alguns deles lado a lado. Uma sequência de Aninha é chamada de *especial* quando, para quaisquer dois cartões vizinhos, o número de um deles é múltiplo do número do outro.

Sequência especial	Sequência especial	Sequência **não** especial
3 9	2 6 1 5	4 2 3

a) Apresente uma sequência especial com sete cartões começando com 6 e 2.

6 2 _ _ _ _ _

CR CN

b) Apresente uma sequência especial com oito cartões.

_ _ _ _ _ _ _ _

CR CN

c) Apresente uma sequência especial com três cartões em que apareçam os cartões 5 e 7.

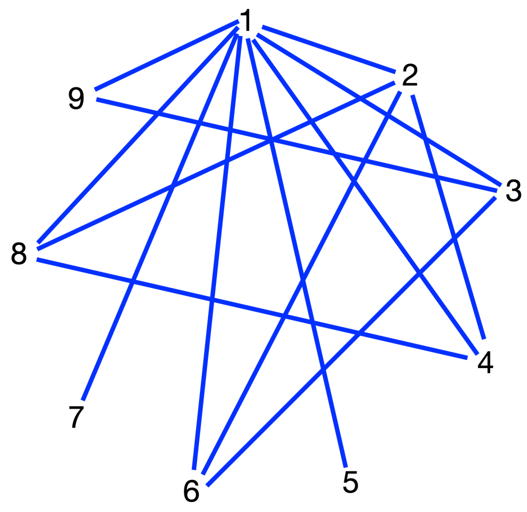
_ _ _

CR CN

d) Explique por que é impossível formar uma sequência especial com os nove cartões.

Solução:

Para chegar a uma solução, é útil a representação a seguir, na qual unimos com uma linha os números que podem ser vizinhos:



a) Para uma sequência que começa com os cartões 6 e 2, nessa ordem, o próximo cartão pode ser o de número 4,8 ou 1 . Por exemplo, sendo o 4 , o cartão seguinte pode ser 8 , seguido do 1 , resultando em $(6,2,4,8,1)$. Os cartões seguintes podem ser os de números 9 e 3 , resultando em $(6,2,4,8,1,9,3)$, uma sequência especial com sete cartões.

b)

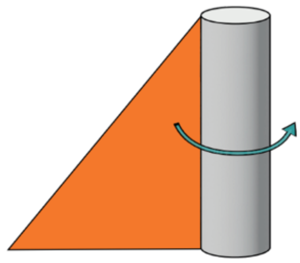
b) Com base na sequência anterior, com sete cartões, é possível formar uma com oito cartões: os dois últimos cartões, 9 e 3 , podem ser movidos para o início da sequência anterior e o cartão de número 5 (ou 7) pode vir à direita do cartão de número 1 , resultando em $(9,3,6,2,4,8,1,5)$ (ou $(9,3,6,2,4,8,1,7)$).

c) Os números 5 e 7 são ambos múltiplos do 1 . Uma sequência especial com três cartões, dentre eles os de números 5 e 7 , pode ser $(5,1,7)$. A outra possível é $(7,1,5)$.

d) Dentre todos os cartões, os de números 5 e 7 são aqueles que podem ter menos vizinhos em uma sequência especial (exatamente um vizinho cada, que deve ser o cartão de número 1). Logo, se um deles é usado, o outro não pode ser usado para obter a maior sequência especial possível. Quando o 5 e o 7 são ambos utilizados, obtemos uma das sequências do item c). Portanto, as maiores sequências especiais com os cartões de números 5 ou 7 têm apenas um desses cartões, que deve ser posicionado em uma das suas pontas (ou no início ou no fim). Logo, é impossível formar uma sequência especial usando todos os cartões. As maiores delas têm oito cartões, tal como a do item b).

Exemplo 5 (OBMEP 2023, Nível 3)

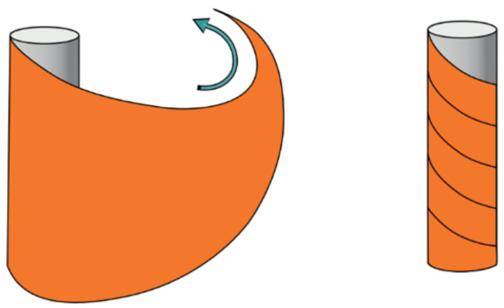
5. Um adesivo, na forma de triângulo retângulo, será colado sobre a superfície lateral de uma lata cilíndrica, com um dos catetos coincidindo com a altura da lata, como na figura. A altura da lata é 15 cm e o comprimento da circunferência da base é 12 cm.



a) Se os catetos do triângulo medem 15 cm e 10 cm, qual será a área da superfície lateral da lata não coberta pelo adesivo?

CR CN

b) Se os catetos do triângulo medem 15 cm e 60 cm, o adesivo poderá ser enrolado cinco vezes sobre a lata. Qual será a área da superfície lateral da lata não coberta pelo adesivo?



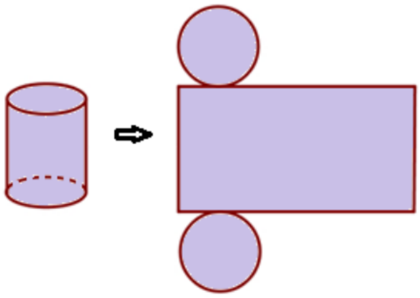
CR CN

c) Se um adesivo de catetos 15 e 90 cm for completamente enrolado no cilindro, qual será a área da superfície lateral da lata coberta por exatamente três camadas desse adesivo?

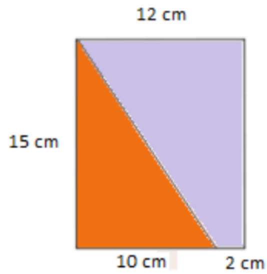
Estrada Dona Castorina, 110 Jardim Botânico - CEP 22460-320 Rio de Janeiro, RJ - Brasil Phone: +55 21 2529-5275
www.impa.br

Solução:

Observamos, inicialmente, que a planificação da superfície de um cilindro circular reto é a reunião de dois círculos (as bases do cilindro) e um retângulo cuja medida de um dos lados é igual ao comprimento da circunferência dos círculos, conforme a figura.

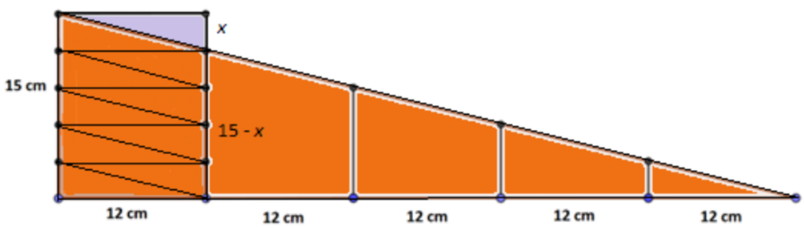


a) Se altura da lata é 15 cm e o comprimento da circunferência da base é 12 cm, esses serão os comprimentos dos lados do retângulo da planificação do cilindro; a figura ao lado mostra, na planificação, como o adesivo triangular cujos catetos medem 15 e 10 cm será colado sobre a superfície lateral do cilindro. A área descoberta está em cinza no retângulo dessa planificação.



Portanto, a área descoberta corresponde à diferença entre a área do retângulo e a área do triângulo, ou seja, 180 – 75 = 105 cm^2. Podemos também calcular, alternativamente, a área do trapézio cujas bases medem 2 cm e 12 cm e cuja altura mede 15 cm, e temos: 7 x 15 = 105 cm^2.

b) Em razão da semelhança, os comprimentos das divisões verticais do triângulo que representa o adesivo são iguais a $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ e $\frac{1}{5}$da altura da planificação, ou seja, 12 cm, 9 cm, 6 cm e 3 cm, respectivamente

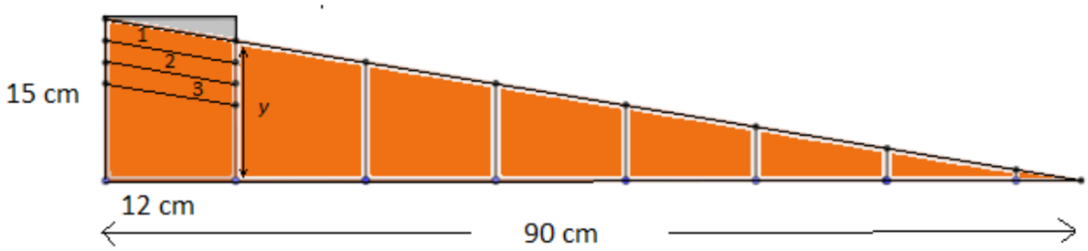


A figura acima mostra, sobre o retângulo da planificação, as sobreposições das divisões do adesivo triangular correspondentes à sobreposição que ocorre a cada volta, e a divisão da altura em cinco partes de mesmo comprimento 3 cm.

Na primeira volta, o adesivo deixará descoberto apenas o triângulo retângulo cinza com catetos medindo 12 cm e 3 cm; nas quatro voltas seguintes, o adesivo será colado sobre a parte já adesivada na volta anterior. Portanto, a área não coberta pelo adesivo será: (3 x 12) ÷ 2 = 18 cm^2.

Outra solução: o triângulo cinza de catetos x e 12 é semelhante ao triângulo de catetos 15 – x e 48. Logo, (x ÷ 12) = ((15 – x) ÷ 48); disso segue que x = 3 cm e a área não coberta é 3 × 12 ÷ 2 = 18 cm^2.

c) O triângulo cujo cateto tem 90 cm de comprimento dará 7 voltas e meia (90 = 7 x 12 + 6) em torno da circunferência da base do cilindro.



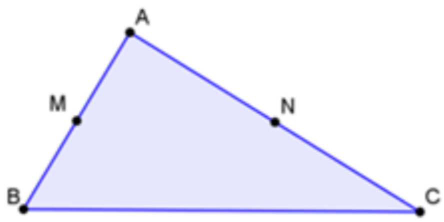
Na primeira volta, apenas o triângulo em cinza da figura acima ficará sem adesivo na superfície cilíndrica. Completada a segunda volta, somente o paralelogramo 1 indicado na figura ficará com apenas uma camada de adesivo; após a terceira volta, somente o paralelogramo 2 ficará com apenas duas camadas de adesivo; após a quarta volta, teremos somente a região indicada como paralelogramo 3 coberta por apenas 3 camadas de adesivo, e é essa a região cuja área devemos calcular.

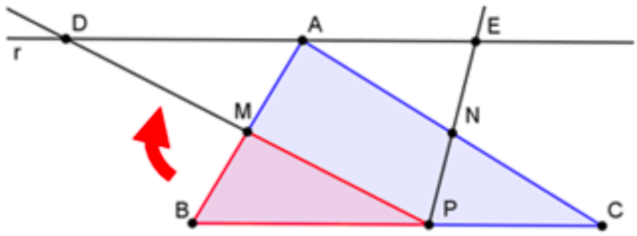
Para determinar a altura y da intersecção do adesivo com a vertical inicial, após a primeira volta, podemos usar a semelhança: $\frac{90}{15} = \frac{78}{y}$, ou seja, $y = \frac{78}{6}$; daí, os paralelogramos sucessivos 1, 2 e 3 terão os lados verticais medindo $15 - \frac{78}{6} = 2$ cm. Como a altura relativa a esses lados mede 12 cm, a área dos paralelogramos, em especial a do paralelogramo 3, será 24 cm^2.

Exemplo 6 (OPM 2019, Nível Alfa)

PROBLEMA 2

Você sabia que é possível recortar um triângulo qualquer de papel ABC em três pedaços e reorganizar os pedaços para formar um triângulo retângulo? Suponha sem perdas que A é o maior dos ângulos e os pontos M e N são os pontos médios de AB e AC, respectivamente. Trace por A uma reta r paralela a BC e marque um ponto P qualquer sobre o lado BC. As retas PM e PN cortam r nos pontos D e E, respectivamente.





a) Mostre que se recortarmos o triângulo MBP, podemos encaixá-lo exatamente sobre o triângulo MAD (são triângulos congruentes). Para isso basta mostrar que os ângulos dos dois triângulos são iguais e que pelo menos um dos lados correspondentes são iguais.

b) Prove que é possível escolher o ponto P no lado BC de modo que o triângulo PDE construído usando as retas r, PM e PN seja retângulo.

c) Explique por que a escolha do ponto P pedida no item b demonstra que é possível fazer dois cortes retos no triângulo ABC e reorganizar os três pedaços para formar um triângulo retângulo.

Solução:

a) Como AD e BP são paralelas, os ângulos DAM e MBP são congruentes, por serem alternos internos, e também são iguais os ângulos AMD e BMP, por serem opostos pelo vértice. Como MA = MB, obtemos, pelo caso ALA, a congruência dos triângulos MDA e MPB, como queríamos.

b) Basta tomar P tal que PN é perpendicular a BC. Isso é possível, pois o ângulo C tem que ser agudo, dado que A é o maior ângulo do triângulo. Isso significa que o pé da perpendicular por N a BC está no interior do segmento BC.

c) Recortando em MP e NP, podemos reorganizar as peças colocando o triângulo MPB sobre MDA, e o triângulo NPC sobre NEA, transformando o triângulo ABC no triângulo EPD, que é retângulo em E, por construção.

Referências

1. Polya, G. (1977). A Arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Editora Interciência.
2. Francisco José de Almeida (2015). A virtude da ordem: Quadrante Editora.
3. Concurso Canguru: https://www.cangurudematematicabrasil.com.br/
4. OBMEP Mirim: https://olimpiadamirim.obmep.org.br/
5. OBMEP: https://www.obmep.org.br/
6. OPM (Olimpíada Paulista de Matemática): http://www.opm.mat.br