Paralelismo e Perpendicularismo, no plano e no espaço

Ledo Vaccaro Machado

Se não é o mais importante livro de Matemática publicado, Os Elementos, de Euclides, está no topo dos livros de maior relevância. Essa magnífica obra é composta de 13 partes, cada uma delas chamada Livro. Ao abrirmos o Livro I, encontramos Definições, e nessas definições:

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.

[...}

4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.

[...]

7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.[1]

Vemos, no Livro I, definições de ponto, reta e plano. Os Elementos foi escrito há mais de 20 séculos e, apesar de seus ensinamentos serem usados até os dias atuais e sua estrutura ser referência não somente em Matemática, trabalhos posteriores, como o de Hilbert[2], nos séculos XIX e XX, excluíram a ideia de definição de ponto, reta e plano. Agora, em Geometria, não definimos essas três entidades geométricas.

PONTO, RETA e PLANO são noções primitivas da Geometria; são aceitas como existentes sem definições.

Não as definir não significa estarmos impossibilitados de apresentar características delas:

O ponto não tem dimensão. Por menor que seja um segmento de reta, uma parte do plano ou do espaço, é possível dispor infinitos pontos neles.

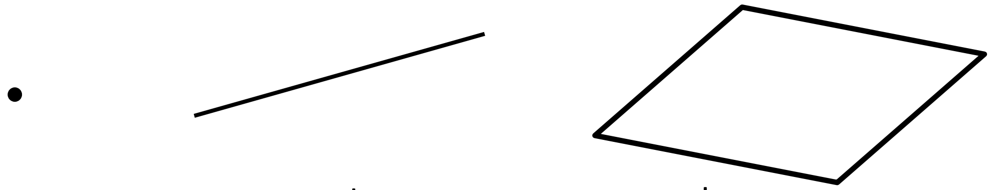
A reta não tem espessura e se estende indefinidamente, não tem início nem fim.

O plano também não tem espessura e não tem borda, se estende indefinidamente em suas duas direções.

[1] EUCLIDES, **Os Elementos/Euclides**; tradução e introdução de Irineu Bicudo. — São Paulo: Editora UNESP, 2009

[2] HILBERT, David, **Fundamentos da Geometria**. — Ed, GRADIVA, Lisboa, 2003

Com essas características, o ponto, a reta e o plano geométricos não pertencem ao mundo físico, nós não vemos pontos, retas e planos. Nada que conhecemos, que tocamos, se estende indefinidamente em duas direções ou é infinitamente fino. Entretanto, precisamos representá-los para que possamos estudar e ensinar Geometria. É comum fazer essas representações no papel através de uma minúscula marca (ponto), um traço (reta) e um paralelogramo (plano).

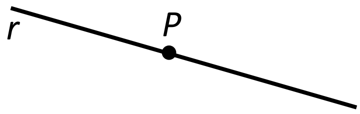


ponto reta plano

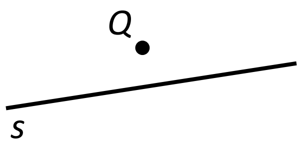
Usamos e abusamos dessas representações, mas jamais devemos confundir as representações com imagens dos elementos primitivos. Tal confusão pode gerar declarações absurdas.

Admitimos o ponto, a reta e o plano como noções primitivas da Geometria. E o espaço? O espaço tridimensional no qual encontramos os sólidos? O espaço não é uma noção primitiva, ele tem definição: espaço é o conjunto de todos os pontos.

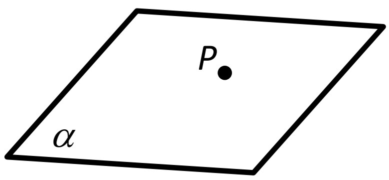
Sendo o espaço o conjunto de todos os pontos, qualquer ponto está (pertence) no espaço, qualquer reta está (contida) no espaço e qualquer plano está (contido) no espaço. Entretanto, um ponto pode estar ou não (pertencer ou não pertencer) a uma **determinada** reta ou a um **determinado** plano.



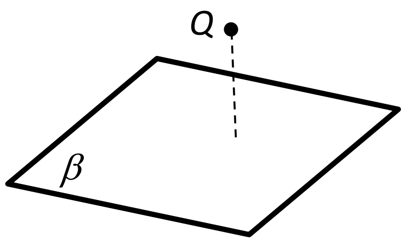
$P \in r$



$Q \notin s$

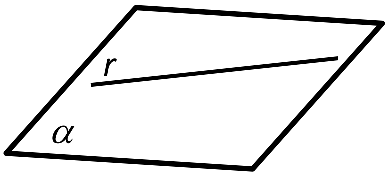


$P \in \alpha$



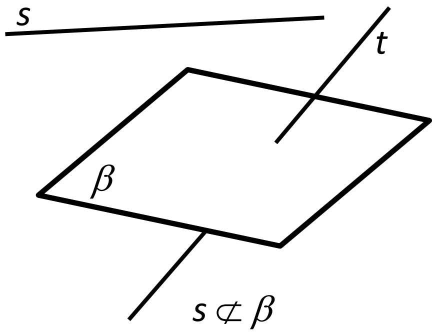
$Q \notin \beta$

Destacamos com negrito as palavras *determinada* e *determinado* porque, para dizermos se um ponto pertence a uma reta ou a um plano, precisamos saber de qual reta e de qual plano estamos tratando. Qualquer ponto do espaço pertence a uma infinidade de retas e a uma infinidade de planos. De forma análoga, uma reta está contida em infinitos planos, mas ela pode estar contida ou não estar contida em **determinado** plano.



$r \subset \alpha$

r está contida em α



$s \not\subset \beta$

$t \not\subset \beta$

s é paralela a β

t é concorrente com β

Uma reta não pode ter exatamente dois pontos em um plano. Se ela tiver dois pontos no plano, ela terá todos os pontos no plano, estará contida no plano. Entretanto, uma reta pode ter um único ponto no plano. Nesse caso, ela será concorrente com o plano (ou secante ao plano). Se não houver qualquer ponto que pertença à reta e ao plano, ela será paralela ao plano.

Se uma reta é paralela a um plano, ela não terá ponto em comum com qualquer reta do plano, mas, para identificar o paralelismo entre uma reta *r* (não contida no plano) e um plano α, basta encontrar uma reta do plano α que seja paralela à reta *r*. Vejamos:

Sejam *r* uma reta não contida em um plano α e *s* uma reta de α paralela a *r*. Suponhamos, por absurdo, que a reta *r* concorra com α no ponto *P*. Tomemos uma reta *t* do plano α paralela a *s* e que passa por *P*. As retas *r* e *t* são concorrentes no ponto *P*. Contudo, *r* e *t* são paralelas a *s* e, por transitividade do paralelismo, *r* e *t* são paralelas. Ou seja, as retas r e *t* concorrem no ponto *P* e são paralelas, o que é um absurdo. Logo, a reta *r* não pode ter um ponto *P* no plano α. A reta *r* é paralela ao plano α.

Se escolhermos um plano no espaço e trabalharmos exclusivamente sobre esse plano, com figuras contidas nesse plano, procurando as relações existentes entre as figuras desse plano, ou seja, sem considerar transformações e relações que exijam sair do plano escolhido, estaremos trabalhando com a Geometria Plana. Os resultados assim obtidos independem do plano escolhido: qualquer teorema provado em um plano será válido em qualquer outro plano; qualquer propriedade de uma figura estabelecida em um plano será válida para as figuras correlatas em qualquer plano. Sendo assim, não precisamos determinar qual o plano escolhido: tomamos um plano genérico. Não representamos, normalmente, o plano escolhido por um paralelogramo e desenhamos as figuras nesse paralelogramo. Praticamente sempre consideramos o plano escolhido como o plano da folha de papel.

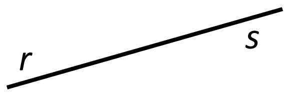
Quando trabalhamos em Geometria Plana, representamos as figuras no plano considerado, no plano da folha de papel. Estaremos representando figuras bidimensionais (figuras planas) em uma base própria para esse tipo de representação: a folha de papel. Muitas vezes podemos guardar, nas representações, as proporções entre as partes das figuras representadas. Quando partimos para a Geometria Espacial, a coisa se complica, porque, geralmente, representamos no plano (a folha de papel) as figuras espaciais. É bem mais complexo guardar as proporções entre as partes dos sólidos representados no plano (folha de papel). Reforçando essa ideia, vejamos o que o Mestre Paulo Cezar nos diz:

> Quando passamos para o mundo tridimensional da Geometria Espacial passamos a enfrentar limitações de diversa ordem. Em primeiro lugar, pelo menos com a tecnologia atual, não dispomos de uma forma prática para representar com fidelidade objetos tridimensionais. Em geral, recorremos as projeções bidimensionais de tais objetos. Mas estas projeções distorcem ângulos, modificam comprimentos e não permitem distinguir pontos que estejam sobre a mesma linha de projeção.
>
> [· · ·]
>
> Estas dificuldades são parte da razão pela qual a Geometria Espacial costuma ser introduzida de modo bem mais formal que a Geometria Plana. Já que nossa intuição não é uma aliada tão confiável como na Geometria Plana, sentimos uma necessidade maior em nos apoiarmos em uma teoria sistemática[3].

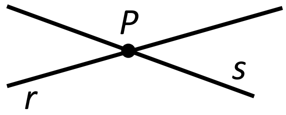
O livro Introdução à Geometria Espacial, do Mestre Paulo Cezar, é um excelente livro para perceber a diferença entre a abordagem educacional na Geometria Plana e na Geometria Espacial.

[3] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, **Introdução à Geometria Espacial** — Ed. Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.

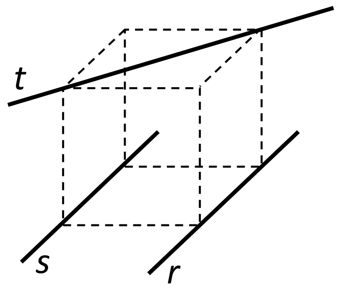
Duas retas podem ter todos os pontos comuns, e estaremos diante de retas coincidentes, ou seja, a mesma reta; um único ponto comum, e elas serão retas concorrentes; ou nenhum ponto comum, e, neste caso, as retas serão paralelas ou reversas.



r e *s* coincidentes



r e *s* concorrentes



r e *s* paralelas
r e *t* reversas

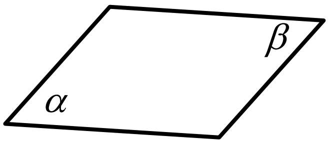
Não é possível que duas retas tenham exatamente dois pontos comuns. Se elas tiverem dois pontos comuns, terão todos os pontos comuns e serão coincidentes.

Duas retas concorrentes serão sempre coplanares. Dizer que duas retas (ou duas figuras) são coplanares é dizer que existe um plano que contém essas duas retas. Sabemos que três pontos não pertencentes a mesma reta (não colineares) determinam um plano, ou seja, se tivermos três pontos não colineares, existe um único plano que passa por esses três pontos. Sabemos, também, que se uma reta tem dois pontos em um plano, ela está contida no plano. Seja *P* o ponto comum às retas concorrentes *r* e *s*. Tomemos um ponto em *r* e um ponto em *s*, distintos de *P*. Temos três pontos não colineares e, portanto, um plano que passa por esses três pontos. Esse plano contém as retas *r* e *s*, por possuir dois pontos distintos de cada uma delas. As retas *r* e *s* são coplanares.

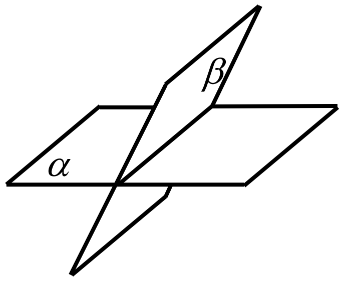
Por sua vez, retas paralelas são, por definição, coplanares. Retas paralelas são retas coplanares que não possuem qualquer ponto comum. Garantir que elas são coplanares é necessário se estivermos trabalhando no espaço, na Geometria Espacial. Na Geometria Plana, todas as retas são coplanares e, portanto, basta identificar que as retas não possuem ponto comum para saber que elas são paralelas. No espaço, duas retas podem não ter qualquer ponto comum e não serem paralelas: podem ser reversas.

As retas coincidentes, as concorrentes e as paralelas são coplanares. Só as reversas não são coplanares, não existe qualquer plano que contenha duas retas reversas. Assim, podemos definir retas reversas como retas não coplanares, sendo desnecessário dizer que elas não possuem pontos comuns: se são não coplanares, certamente não possuem qualquer ponto comum. Além disso, retas reversas só existem no espaço: na Geometria Plana, todas as retas são coplanares.

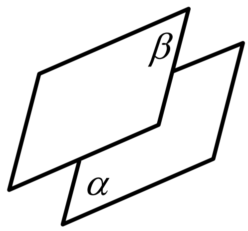
Dois planos podem ter uma infinidade de pontos comuns ou nenhum ponto comum. Se possuírem uma infinidade de pontos comuns eles serão coincidentes (o mesmo plano) ou concorrentes e, nesse caso, possuirão exatamente uma reta comum. Se não possuírem qualquer ponto comum, serão paralelos.



α e β coincidentes



α e β concorrentes



α e β paralelos

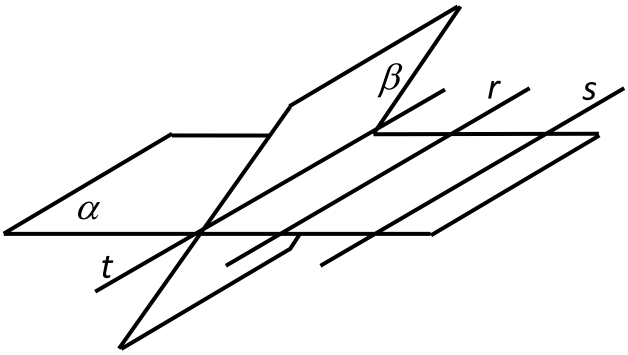
Não é possível dois planos terem apenas um ponto comum. Se eles tiverem um ponto comum, terão, pelo menos, uma reta comum.

Se dois planos são paralelos, todas as retas de um deles será paralela ao outro. Para identificar se dois planos são paralelos, não precisamos verificar se cada reta de um deles é paralela ao outro. Basta encontrar duas retas concorrentes de um deles que sejam paralelas ao outro.

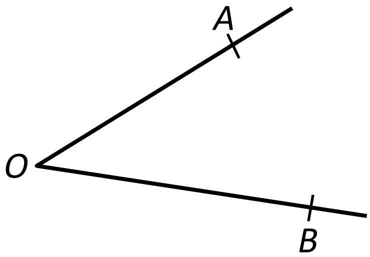
Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

Consideremos duas retas **concorrentes**, *r* e *s*, contidas em um plano α e paralelas a um plano β. Suponhamos, por absurdo, que esses dois planos possuam uma reta comum, ou seja, que esses dois planos não sejam paralelos. Chamemos essa reta comum de *t*. As retas *r* e *t* são coplanares, por estarem contidas no plano α, e também são possuem qualquer ponto comum, já que *t* pertence ao plano β e a reta r é paralela a β. Portanto, *r* e *t* são paralelas. Com raciocínio análogo, concluímos que *s* e *t* são paralelas. Ora, se *r* e *t* são paralelas e *s* e t também, então *r* e *s* são paralelas (transitividade), o que é um absurdo, pois partimos de *r* e *s* concorrentes. Sendo assim, a reta *t*, contida nos dois planos, não existe. Os planos α e β não possuem qualquer ponto comum, são paralelos.

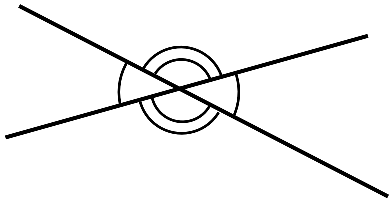
Notemos que as retas *r* e *s* consideradas na demonstração devem ser concorrentes, caso contrário, o absurdo não será gerado. Duas retas paralelas, *r* e *s*, contidas no plano α e paralelas ao plano β não garantem que os planos α e β sejam paralelos.



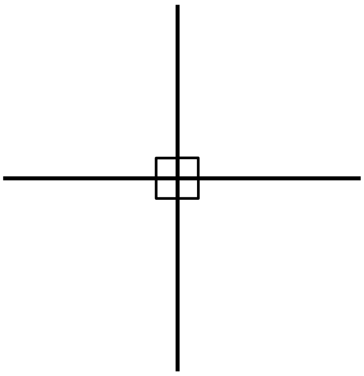
Ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. A origem das semirretas é o vértice do ângulo.



Duas retas concorrentes formam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice, portanto, dois a dois congruentes.

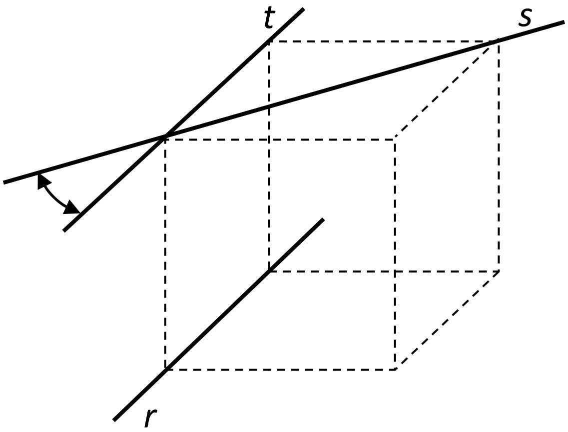


Se as duas retas concorrentes formarem quatro ângulos congruentes, elas serão retas perpendiculares e cada um dos ângulos será um ângulo reto.



Definimos o ângulo reto sem precisar de qualquer sistema de medida de ângulos: não falamos em grau, nem em grado, nem em radianos ou em qualquer outro sistema de medidas. O grau pode ser definido como o ângulo correspondente a 1/90 do ângulo reto. Depois de definirmos o grau, podemos dizer que o ângulo reto é o ângulo de 90^{o}.

O que vimos, até esse momento, foram ângulos formados por retas de um plano. E como podemos definir o ângulo entre retas reversas? O ângulo formado por retas reversas (ou a medida do ângulo formado por duas retas reversas) é o ângulo formado por uma delas com uma paralela a outra e concorrente com a primeira. Em outras palavras, se *r* e *s* são retas reversas, para saber o ângulo entre elas, podemos tomar uma reta paralela a *r* e concorrente com *s*. O ângulo formado por *r* e *s* será o ângulo formado por *s* e a paralela.



r e *s* são reversas

r e *t* são paralelas

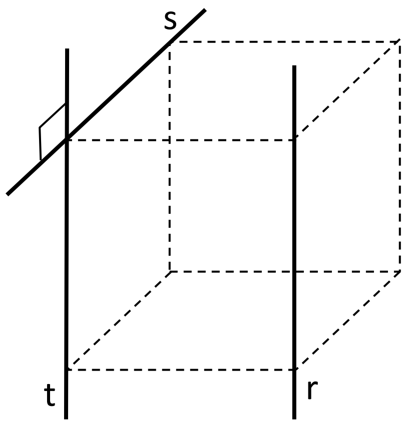
O ângulo entre *r* e *s* é
o ângulo entre *s* e *t*.

Se duas retas reversas formam ângulo reto, elas são ditas ortogonais.

r e *s* são reversas

s e *t* são perpendiculares

r e *s* são ortogonais

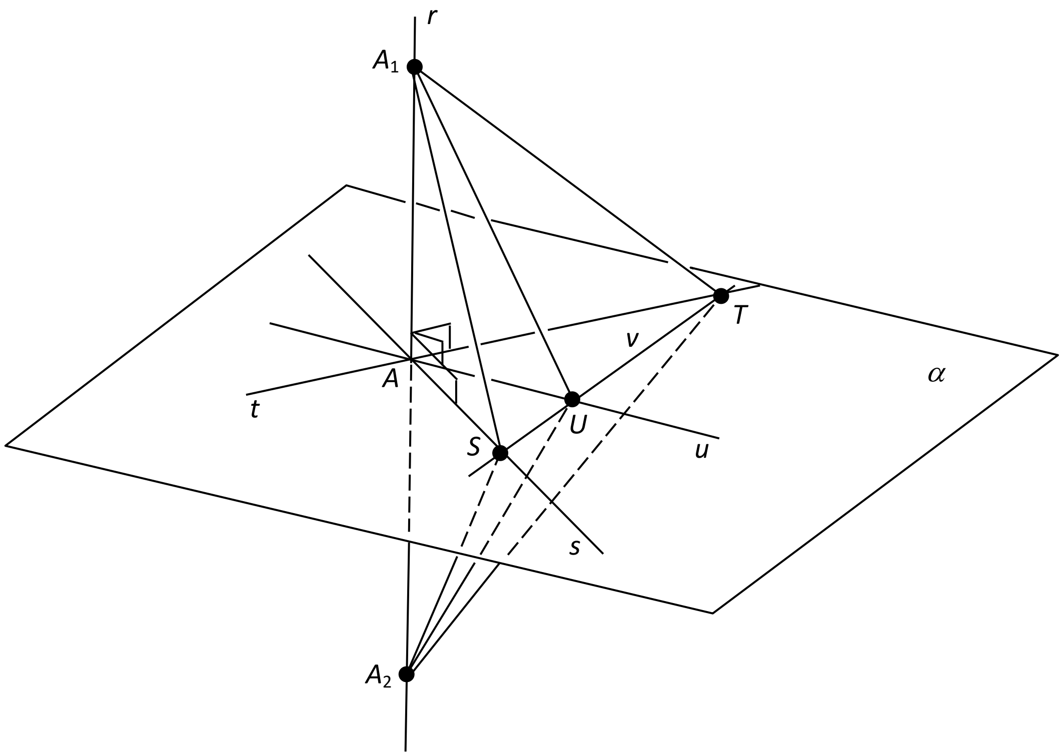


Uma reta também pode ser perpendicular a um plano. Uma reta é perpendicular a um plano quando ela forma ângulo reto com todas as retas do plano. Essa reta é concorrente com o plano e o ponto de concorrência é chamado de pé da perpendicular. Se *r* é perpendicular ao plano α e *P* é o pé dessa perpendicular, todas as retas contidas em α e que passam por *P* são perpendiculares a *r*.

A palavra *perpendicular* restringe-se a retas concorrentes, mas a palavra *ortogonal* refere-se a quaisquer retas que formem ângulo reto, inclusive às perpendiculares. Dito isto, uma reta perpendicular a um plano pode ser definida como sendo ortogonal a todas as retas do plano. E como identificar que uma *r* é ortogonal a todos as retas de um plano α? Por certo não será verificando individualmente a ortogonalidade de cada reta do plano α com *r*, o que seria uma tarefa impossível. Por sorte, temos um teorema que nos garante que:

Se *r* é ortogonal a um par de retas concorrentes de α, então r é perpendicular a α.

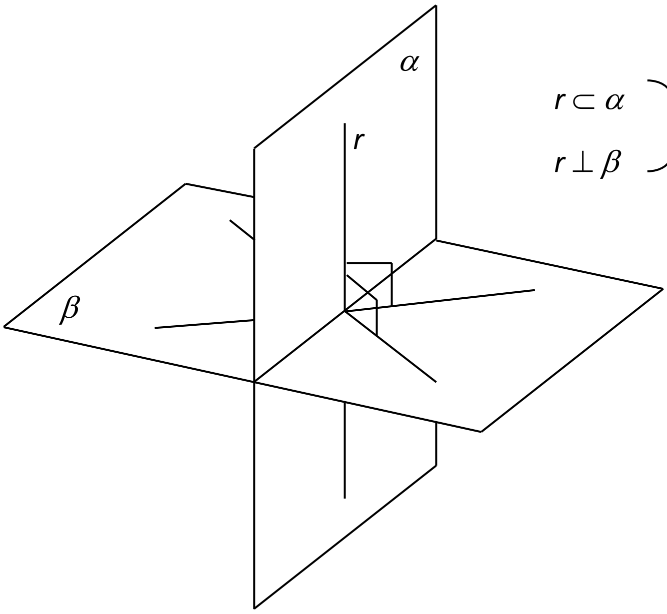
A demonstração desse teorema é um tanto quanto longa. Vamos reproduzir essa demonstração presente no livro Introdução à Geometria Espacial, do Mestre Paulo Cezar, que se apoia na figura a seguir.



Sejam *s* e *t* duas retas de α que se encontram em *A*, ambas ortogonais a *r*. Sem perda de generalidade, podemos supor que *r* passa por *A* (senão tomamos uma paralela a *r* passando por *A*). Vamos mostrar que toda reta *u* de α passando por *A* é perpendicular a *r*. Se *u* coincide com *s* ou *t*, então *u* é certamente perpendicular a *r*. Senão, tomemos uma reta *v* de α tal que seu ponto de interseção *U* com *u* esteja entre os pontos de interseção *S* e *T* com *s* e *t*. Em cada semiespaço determinado por α tomemos pontos A_1 e A_2 tais que $\overline{AA_1} = \overline{\mathrm{AA}_2}$.

Os triângulos retângulos A_1AS e A_2AS são certamente iguais, já que $\overline{AA_1} = \overline{\mathrm{AA}_2}$ e o cateto $\overline{AS}$ é comum. Logo, $\overline{A_1S} = \overline{A_2S}$. Analogamente, os triângulos A_1AT e A_2AT são iguais, daí resultando $\overline{A_1T} = \overline{A_2T}$. Examinando, então, os triângulos A_1ST e A_2ST, observamos que o lado $\overline{ST}$ é comum e os demais lados são respectivamente iguais. Portanto, estes triângulos são iguais. Mas da igualdade de A_1ST e A_2ST resulta também a igualdade de A_1SU e A_2SU ($\overline{SU}$ é comum, $\overline{A_1S} = \overline{A_2S}$ e os ângulos $\widehat{A_1SU}$ e $\widehat{A_2SU}$ são iguais). Logo, $\overline{A_1U} = \overline{A_2U}$ e, daí, os triângulos A_1AU e A_2AU são iguais, por possuírem lados respectivamente iguais. Mas isto acarreta a igualdade dos ângulos $\widehat{A_1AU}$ e $\widehat{A_2AU}$. Como A_1, A e A_2 são colineares, cada um daqueles ângulos é necessariamente reto. Ou seja, *u* é perpendicular a *r*.

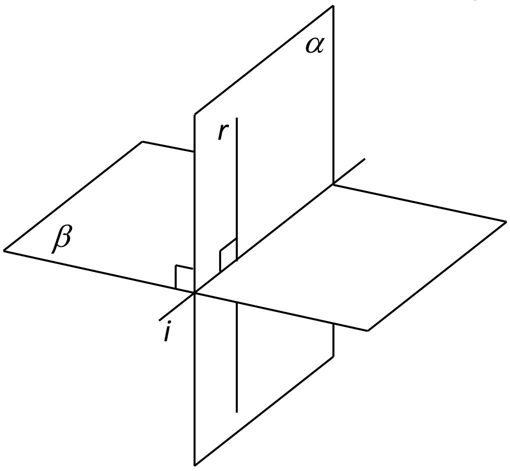
Dois planos também podem ser perpendiculares. Um plano α é perpendicular a um plano β se, e somente se, o plano α contém uma reta perpendicular a β.

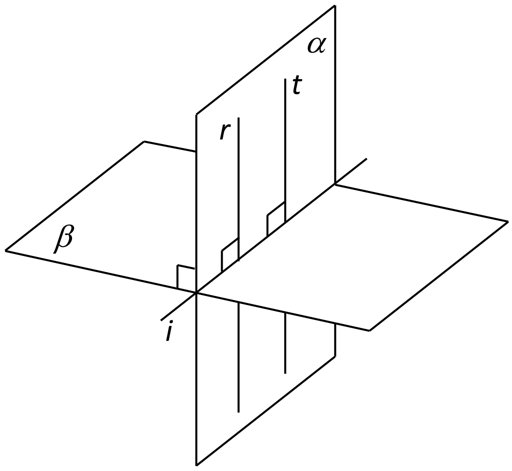


$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \\ r \perp \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

É claro que, se existe uma reta *r* de α que seja perpendicular a β, essa reta não é única. Toda reta de α paralela a *r* será perpendicular a β.

Se dois panos, α e β, são perpendiculares e uma reta *r* de α é perpendicular à interseção dos dois planos, então *r* será perpendicular a β. Isso é um teorema.

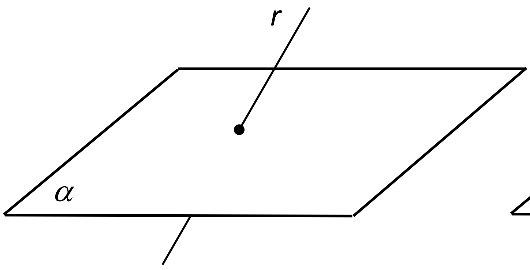


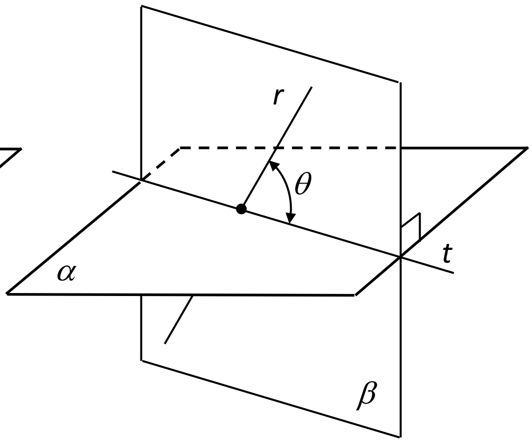


Sejam dois planos perpendiculares, α e β, que concorrem na reta *i*, e uma reta *r* de α perpendicular a *i*. Se α e β são perpendiculares, existe uma reta *t* em α que é perpendicular a

β. Se t é perpendicular a β, ela forma ângulo reto com todas as retas de β e, em particular, com a reta i. As retas t e r são perpendiculares a i, portanto, são paralelas. Se r é paralela a t e t é perpendicular β, então r é perpendicular a β.

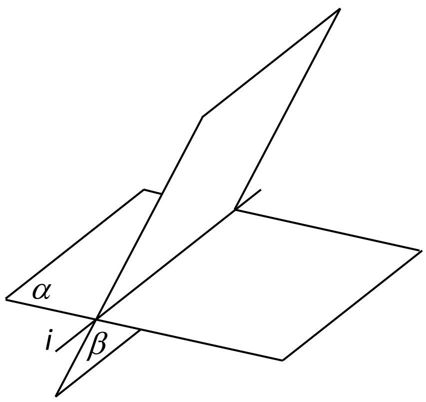
Se uma reta for perpendicular a um plano, o ângulo entre a reta e o plano mede 90°. Se a reta estiver contida no plano ou for paralela ao plano, o ângulo será de 0°. E se a reta for oblíqua ao plano?

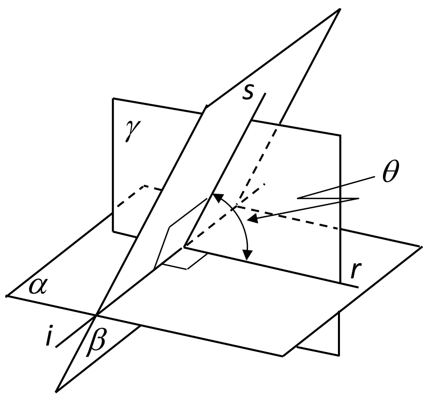




O ângulo entre uma reta r e um plano α é o ângulo entre r e a interseção do plano perpendicular a α que contém r.

Também se define ângulos entre dois planos. Se os planos forem perpendiculares, o ângulo é de 90°. Se os planos forem paralelos, é de 0°. Se dois planos, α e β, forem oblíquos, concorrendo na reta i, traçamos um plano γ perpendicular a i e que concorre com os planos α e β segundo as retas r e s (figura). O ângulo entre α e β será o ângulo entre r e s.

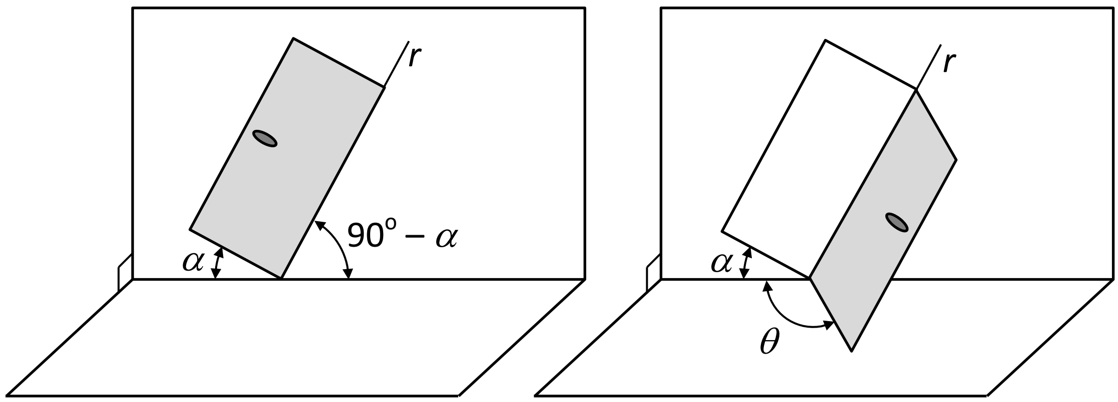




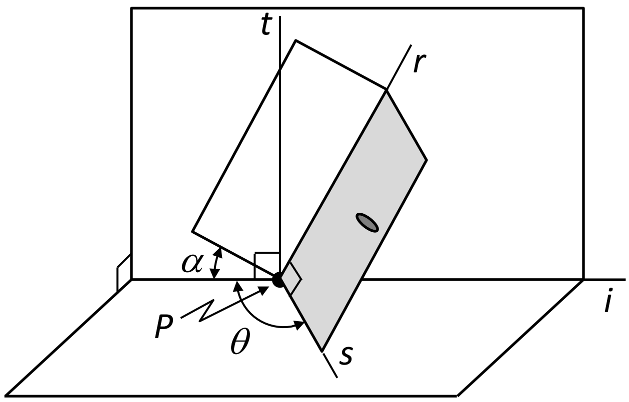
Vejamos um problema interessante cuja solução envolve o que discutimos até agora.

Em uma instalação artística, foi posta uma porta inclinada, ou seja, a reta na qual ficavam as dobradiças formava um ângulo de $90^o - \alpha$ com a reta determinada pelo encontro da parede com o chão (figura). Com isso, a porta não abria totalmente: a base da porta batia no chão, formando um ângulo θ com a reta de encontra da parede com o chão.

Qual é o valor de θ em função de α?



Chamemos de *i* a reta determinada pelo encontro do plano do chão com o plano da parede, e de *s* a reta definida pela base da porta (figura). As retas *s* e *r*, que se encontram no ponto *P*, são perpendiculares, por serem os lados da porta, que é um retângulo. Tracemos por *P* uma reta contida no plano da parede e perpendicular a *i*. Chamemos essa reta de *t*. Como *t* é perpendicular à interseção do chão com a parede, ela é perpendicular ao plano do chão e, por conseguinte, ortogonal a todas as retas do plano do chão e, em especial, *t* é perpendicular à reta *s*.



Ora, *s* é perpendicular a *t* e a *r*, duas retas concorrentes do plano da parede. Portanto, s é perpendicular ao plano da parede e forma ângulo reto com todas as retas do plano da parede. A reta *s* é perpendicular a i, e o ângulo θ é reto, independentemente do valor de α.