Educação financeira – Aula 2

Quer pagar quanto? Quer pagar quando?

A saga das parcelas iguais!

Prof. Ivail Muniz Junior

Essa é a segunda aula de uma série de aulas sobre a temática da Educação Financeira, em especial sobre noções de Economia e Finanças para a Educação Básica, inspirada no volume de projeto do Livro Aberto, escrito por nós, por meio uma parceria IMPA/OBMEP.

Qual o papel da escola, e do professor de Matemática (inclusive), na construção de uma educação financeira, que convide e ajude os estudantes a pensarem sobre geração e gestão e acumulação de recursos financeiros, quando diante de demandas pessoais e familiares que dependam desses recursos, que inclua interpretação, reflexão e tomada de decisão, de forma crítica e fundamentada?

Nossa abordagem sobre Educação Financeira tem como objetivo convidar os estudantes a pensarem e refletirem sobre situações financeiras e econômicas, predominantemente por meio da investigação e da resolução de problemas, geralmente envolvendo a tomada de decisão, considerando aspectos matemáticos (aprendidos ao longo da Educação Básica) e aspectos não matemáticos (financeiros, econômicos, comportamentais, culturais e sociais), de forma crítica e fundamentada.

Assim, a abordagem que usamos aqui não se limita a discutir conceitos e técnicas da Matemática Financeira. A matemática financeira que será abordada nessa aula, envolvendo situações de consumo, crédito e investimentos com parcelas/aportes iguais, é um dos componentes que será usado, para contribuir com a Educação Financeira dos Estudantes, pensando de forma multidisciplinar a partir do ambiente escolar.

Antes de discutir as situações financeiras da aula de hoje, gostaríamos de reforçar alguns pontos essenciais da aula anterior, pois são de fundamental importância para ampliar a visão sobre as oportunidades que temos com essa temática, e da importância que o trabalho realizado em sala de aula pode ter na formação dos estudantes.

Educação Financeira: Um ponto de partida.

Sabemos que Educação Financeira está na moda. Tanto é que chegou na Educação Básica. Para alguns, ela não passa de uma estratégia para manipular ou influenciar pessoas a aceitarem determinadas mudanças econômicas e financeiras; para outros, não é senão outra forma de se referir à matemática financeira.

Defendemos que desenvolver habilidades financeiras pode ajudar jovens a lidar com os novos desafios do século XXI, e que a escola pode contribuir como ambiente propício e profícuo para isso.

Mas lidar com o dinheiro não é o ponto de partida. O ponto de partida são as necessidades humanas. Os recursos geralmente são limitados (ou seria limitada a visão de sociedade?), que demandam escolhas, por vezes desafiadoras, na saga de satisfazer algumas dessas necessidades.

As escolhas financeiras fazem parte da atividade humana há muito tempo, nas mais variadas fases da vida das pessoas. Desde que nascemos, mobilizamos nossos desejos para satisfazer nossas necessidades, tendo consciência ou não delas.

Começamos influenciando as escolhas dos nossos pais ou responsáveis nas questões básicas de sobrevivência como o que comer, vestir, onde morar e depois continuamos impactando fortemente o orçamento da família, ao longo da adolescência e da juventude, sobre questões relacionadas a alimentação, saúde, educação, vestuário, lazer, entretenimento, moradia dentre outras. Na vida adulta, a brincadeira muda!

Onde estudar, qual curso fazer, o quanto preciso e quero me dedicar aos estudos, quais línguas aprender, que profissão escolher, para onde viajar, quais roupas tenho condições de comprar, quais aparelhos e serviços tecnológicos preciso e quero adquirir, quanto posso gastar em uma festa, o que posso fazer para ajudar na renda da família diante das necessidades, dentre outras, são perguntas que os jovens se fazem frequentemente.

Ao escrever um material para adolescentes, tanto do ensino fundamental II quanto do Ensino Médio, é importante pensar no presente e no futuro.

Parte dessa formação financeira estará relacionada às demandas pessoais da juventude, ou seja, com as quais estão lidando e vão lidar até o início da vida adulta. Lidar com demandas de consumo, com projetos de formação cognitiva e de construção de responsabilidades, com demandas por lazer e relacionamentos, com a prática de esportes e da música, costumam ser mais frequentes nessa fase da vida.

Porém, uma parte da formação econômica se estende à toda a vida. A relação entre inflação e poder de compra, o valor do dinheiro no tempo, e visão de planejamento e orçamento financeiros, os investimentos de curto/médio/longo prazos, são para toda a vida, e podem ajudar a enfrentar vários desafios econômicos e financeiros ainda mais amplos.

Segundo uma pesquisa publicada em 2023 pelo Ministério do Trabalho, o Brasil tem aproximadamente 205 milhões de habitantes, dos quais 17% são jovens de 14 a 24 anos, e desses, 5,2 milhões estão desempregados, o que corresponde a 55% das pessoas nessa situação no país, que, no total, chegam a 9,4 milhões.

Economia

Pesquisa mostra 5,2 milhões de jovens entre 14 e 24 anos sem emprego

Entre os desempregados, 52% são mulheres e 66% são pretos e pardos

Publicado em 26/05/2023 - 15:25 Por Flávia Albuquerque - Repórter da Agência Brasil - São Paulo

https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2023-05/pesquisa-mostra-52-milhoes-de-jovens-entre-14-e-24-anos-sem-emprego. Acesso em 01. Jul 2023.

Além da questão do emprego, as pessoas enfrentam diversos outros desafios financeiros, tais como insegurança alimentar, inflação, juros altos, crédito com custo elevado, redução salarial, alto nível de desemprego entre jovens, disparidade salarial em função de gênero e raça, aumento do uso da tecnologia substituindo milhões de postos de trabalho, fraudes e golpes, acesso à educação e saúde públicas, dentre outros.

Veja a chamada de uma matéria sobre o nível de endividamento no Brasil.

JORNAL DA USP

Cerca de 43% da população adulta do País está endividada

O professor Paulo Feldmann fala sobre o programa Desenrola Brasil, por meio do qual o governo pretende encontrar uma solução para os mais de 70 milhões de endividados do País

Atualidades / Jornal da USP no Ar / Jornal da USP no Ar 1ª edição / Rádio USP - https://jornal.usp.br/?p=654319

Publicado: 29/06/2023

Por Júlia Galvão

FACEBOOK

https://jornal.usp.br/atualidades/cerca-de-43-da-populacao-adulta-do-pais-esta-endividada/

Para lidar bem com tantas questões econômicas, tomar boas decisões financeiras requer muitas habilidades, algumas delas mais amplas e complexas do que as necessárias aos cidadãos até agora. A grande maioria das pessoas precisa lidar com o dinheiro de forma desafiadora, e pensar nisso o quanto antes pode ajudar a pensar sobre as decisões financeiras ao longo da vida.

Uma delas é avaliar onde colocar o dinheiro que sobra após pagar as contas.

Economia

Investidores no Tesouro Direto crescem 36% no primeiro semestre

Programa de compra de títulos da dívida pública do governo teve 286.682 novos participantes entre janeiro e junho deste ano

Por **da Redação**
24 jul 2019, 16h15

https://veja.abril.com.br/economia/investidores-no-tesouro-direto-crescem-36-no-primeiro-semestre/.

Qual o papel do ensino de Matemática na formação econômica dos estudantes da Educação Básica, olhando para o presente e para o futuro?

Abordar Economia: uma necessidade

Economista Há-Joon Chang,

- ✓ Não existe resposta certa em economia, por isso não podemos deixá-la só para os economistas.
- ✓ Todo cidadão responsável precisa aprender um pouco de economia, ou seja, é necessário que a pessoa desenvolva, desde a educação básica, a capacidade crítica de julgar qual argumento faz mais sentido em uma dada circunstância econômica, diante de diferentes argumentos econômicos, os quais estão sempre baseados em valores morais e objetivos políticos, que podem ser distintos entre si. (Chang, 2015, p. 17)

Vamos chamar de Educação Financeira em Contextos Escolares (EFCE) ao processo de educar a partir de um conjunto de estratégias e ações desenvolvidas para o contexto escolar, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, didáticos e multidisciplinares, que convidem os estudantes a refletirem sobre situações econômicas e financeiras relacionadas com a aquisição, planejamento, utilização e redistribuição do dinheiro, de forma crítica e fundamentada, e também sobre possíveis consequências de suas decisões e atitudes frente às suas demandas, necessidades, projetos e realizações em sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem.

A partir dessa definição, gostaríamos de apresentar os objetivos gerais do volume de EF, para em seguida, delimitar o que entendemos por aluno educado financeiramente (Literacia Financeira), para a partir apresentar uma série de atividades, que esperamos traduzir a essência do Livro Aberto de Educação Financeira.

Objetivos gerais

1. Convidar os estudantes e professores a refletirem sobre situações financeiras e econômicas relacionadas a aquisição, utilização, distribuição e acumulação do dinheiro, para satisfação de suas necessidades, por meio da produção de Ambientes de Educação Financeira Escolar.

2. Convidar os estudantes e professores a refletirem sobre suas atitudes, opções, escolhas e as possíveis consequências dessas escolhas, em situações de renda, consumo, crédito, poupança/investimento, risco e proteção, de modo ético e sustentável.

3. Oferecer informações para que sejam aptos a analisar, fazer julgamentos fundamentados, tomar decisões e ter posições críticas sobre questões financeiras que envolvam sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem.

Essa perspectiva de EFE, visa estimular os estudantes a pensar de forma crítica (avaliando opções, considerando seus riscos e pensando em possíveis alternativas), baseia-se em quatro princípios: convite à reflexão, conexão didática, dualidade e lente multidisciplinar.

O **convite à reflexão** deixa claro que a EF não deve ser prescritiva ou impositiva, e sim um convite aos estudantes para refletir sobre situações financeiras que contemplem diferentes aspectos, para que tomem suas próprias decisões. Investir no ócio e na paz, podem ser o melhor investimento. O valor do ser deveria ser continuamente repensado em relação ao valor pós-moderno e líquido do ter.

A **conexão didática** estabelece a importância do contexto escolar na prática da educação financeira. Nessa EFE, queremos entender como os alunos pensam matematicamente ao analisar situações financeiras, e que aspectos não matemáticos emergem, de modo que essa compreensão gere novos materiais, novas formas de ensinar, novas práticas docentes e novos processos de avaliação.

A **dualidade** marca uma posição: a EFE pode e deve ser uma via de mão dupla, e portando dual, de modo que tanto os conhecimentos matemáticos dos estudantes os auxiliem na compreensão, análise e tomada de decisão em SEF, como a abordagem da educação financeira contribua para o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes. Ou seja, defendemos que o ensino de matemática e a educação financeira sejam dois lados de uma mesma moeda.

E, finalmente, o princípio da **lente multidisciplinar** sustenta que é indispensável oferecer múltiplas leituras da situação financeira, de modo que aspectos financeiros, econômicos, matemáticos, comportamentais, culturais, sociais, políticos e ecológicos possam ser utilizados de forma articulada, na leitura de situações de consumo, renda, endividamento, investimento, planejamento financeiro, sustentabilidade etc. Estudos envolvendo *marketing*, neurociência, economia, antropologia e sociologia do consumo constituem diferentes lentes. E, como lentes, focam alguns aspectos e desfocam outros.

Figura 1 – Os quatro princípios da Educação Financeira Escolar de Muniz.

Quatro princípios da Educação Financeira Escolar, segundo Muniz

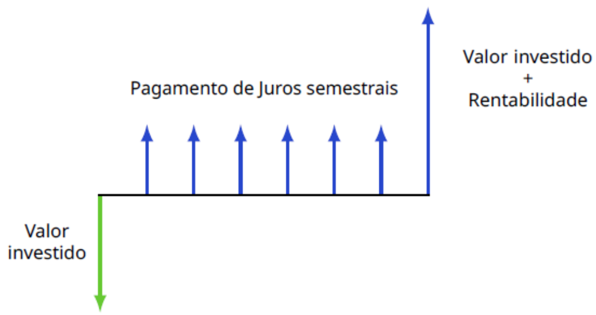
Baseada nessa concepção de EFE, apresentamos uma proposta de **Literacia Financeira** para adolescentes e jovens da Educação Básica, composta de quatro competências centrais.

A partir de agora, vamos explorar algumas atividades, a maioria retirada do livro aberto, que tratam de noções de economia e finanças, na perspectiva de Educação Financeira Escolar que acabamos de apresentar.

A saga das parcelas/aporte iguais no tempo.

É muito comum vermos produtos e serviços sendo oferecidos com opções de pagamento em prestações mensais e iguais. O empréstimo é uma das operações de financeiras centrais na economia, realizada por pessoas, empresas e governos.
Também são muito comuns situações em que se depositam mensalmente uma mesma quantia para gerar um acumulado, quer seja para aposentadoria, quer seja para a compra de um carro, um consórcio, ou outro bem, com a incidência de juros, ou não, nas operações financeiras.
Nos dois casos, temos o que chamamos de trocas intertemporais, ou seja, trocas (compra hoje, paga amanhã), envolvendo quantias ao longo do tempo. A figura a seguir é um exemplo desse tipo de situação.

Mas não são apenas situações de consumo de bens ou serviços. Há investimentos que nos fornecem a opção de recebermos quantias iguais periodicamente, tais como os títulos que pagam juros semestrais, conforme ilustrado na Figura 10. Nesse caso, o investidor empresta dinheiro para o governo federal, que por sua vez promete pagar o que pegou emprestado, em uma ou mais parcelas, ao longo do tempo.



Para começarmos a trabalhar os aspectos matemáticos envolvidos nessas séries de pagamentos iguais e igualmente distribuídos no tempo, chamadas de séries uniformes, bem como aspectos financeiros, econômicos, comportamentais, culturais e sociais presentes nas variadas situações em que as séries uniformes estão presentes, convidamos você a pensar com a gente nessas novas trocas intertemporais.

Investimentos em parcelas iguais.

Vamos começar do presente para o futuro, ou seja, diferente dos livros didáticos, vamos investigar uma serie de aportes iguais, igualmente distribuídos no tempo, olhando o valor acumulado (valor futuro) ao final do período, e o impacto do tempo e da taxa nesse valor futuro.

Explorando — **Séries Uniformes**

Atividade 21

Disciplina e paciência: nascidas uma para a outra!

Considere que Isabel começou a planejar uma poupança para realizar alguns sonhos. Para isso resolveu que, a partir de janeiro do próximo ano, aplicará mensalmente R$ 300,00 em um investimento com rentabilidade de 1 % ao mês.

a) Quanto Isabel terá acumulado exatamente após o 4º depósito, ou seja, em abril do próximo ano?

b) E se o tempo de aplicação for de 1 ano? E 20 anos?

Vamos começar investigando quanto Isabel terá acumulado imediatamente após o 4º depósito, ou seja, em abril do próximo ano.

A representação temporal a seguir ilustra o fluxo de depósitos que será realizado no período de janeiro a abril, bem como o valor futuro de cada quantia depositada nesses quatro meses.

Tabela 13: Fluxo de depósitos de Isabel.

Valores (R$)			
Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
300,00 →	→	→	309,09
	300,00 →	→	306,03
		300,00 →	303,00
			300,00
		Total	1.218,12

Assim, o valor futuro total imediatamente após os 4 depósitos pode ser calculado somando-se o valor futuro de cada depósito em abril daquele ano,

$$VF_4 = 300 \times 1{,}01^3 + 300 \times 1{,}01^2 + 300 \times 1{,}01^1 + 300 = \text{R\$ } 1.218{,}12$$

Em vez de calcular essas quatro parcelas e somá-las, também poderíamos pensar assim:

$$VF_4 = 300 \times 1{,}01^3 + 300 \times 1{,}01^2 + 300 \times 1{,}01^1 + 300.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por 1,01, temos:

$$1{,}01 \times VF_4 = 300 \times 1{,}01^4 + 300 \times 1{,}01^3 + 300 \times 1,\, 01^2 + 300 \times 1{,}10.$$

Subtraindo as duas equações, chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} 1{,}01 \times VF_4 - VF_4 &= 300 \times 1{,}01^4 - 300 \\ VF_4(1{,}01 - 1) &= 300(1{,}01^4 - 1) \\ VF_4 &= \frac{300(1{,}01^4 - 1)}{1{,}01 - 1} = \text{R\$ } 1.218{,}12. \end{aligned}$$

Ainda poderíamos resolver por um terceiro caminho, que é perceber que essa sequência de pagamentos é uma progressão geométrica (PG), com o primeiro termo igual a 300 e razão igual 1,01.

Observação

Você percebeu que temos uma soma de uma PG?

Nesse caso, o *VF* é igual à soma dos primeiros quatro termos dessa progressão geométrica. Assim, também podemos calcular o valor futuro usando o seguinte resultado.

Dada uma progressão geométrica, de termo inicial a_1 e razão q, a soma dos n primeiros termos dessa progressão é dada por:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + qa_1 + q^2a_1 + q^3a_1 + \cdots + q^{n-1}a_1 \\ qS_n &= qa_1 + q^2a_1 + q^3a_1 + \cdots + q^{n-1}a_1 + q^na_1 \\ qS_n - S_n &= q^na_1 - a_1 \\ S_n &= a_1\frac{(q^n - 1)}{q - 1}. \end{aligned}$$

Assim, usando essa expressão que fornece a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, o valor *VF* pode ser obtido por:

$$\begin{aligned} VF_4 &= \frac{300(1{,}01^4 - 1)}{1{,}01 - 1} \\ VF_4 &= \text{R\$ } 1.218{,}12. \end{aligned}$$

Você percebeu que usamos três formas diferentes para calcular o *VF*, nesta situação financeira?

Você percebeu que usamos três formas diferentes para calcular o *VF*, nesta situação financeira?

Repare que a estratégia usada na segunda forma foi exatamente a que usamos para demonstrar a fórmula da Soma da PG presente na terceira forma.

Usar a fórmula pode agilizar os cálculos do *VF* envolvendo um número maior de depósitos.

Por exemplo, se os depósitos continuarem, mantendo-se a mesma taxa, temos que o *VF* imediatamente após o 12º depósito será igual a:

$$VF_{12} = \frac{300(1{,}01^{12} - 1)}{1{,}01 - 1}$$
$$VF_{12} = \text{R\$ } 3.804{,}75.$$

E para um prazo ainda maior, de 240 meses (20 anos) de depósitos (haja disciplina e paciência!), usando a mesma lógica da operação anterior, temos que o *VF* imediatamente após o 240º depósito, é igual a:

$$VF_{240} = \frac{300(1{,}01^{240} - 1)}{1{,}01 - 1}$$
$$VF_{240} = \text{R\$ } 296.776{,}61.$$

Esse valor nos mostra que as 240 aplicações de 300,00 reais, realizadas todos os meses, geraram quase 300 mil reais ao final do período, a uma taxa de 1 % ao mês.

Podemos também usar calculadoras que calculam diretamente esses valores. Algumas delas estão disponíveis dentro de simuladores. Um deles é a calculadora do Banco Central, disponível no site e como aplicativo para smartphone.

E para um prazo ainda maior, de 240 meses (20 anos) de depósitos (haja disciplina e paciência!), usando a mesma lógica da operação anterior, temos que o *VF* imediatamente após o 240º depósito, é igual a:

$$VF_{240} = \frac{300(1{,}01^{240} - 1)}{1{,}01 - 1}$$
$$VF_{240} = \text{R\$ } 296.776{,}61.$$

Esse valor nos mostra que as 240 aplicações de 300,00 reais, realizadas todos os meses, geraram quase 300 mil reais ao final do período, a uma taxa de 1 % ao mês.

Podemos também usar calculadoras que calculam diretamente esses valores. Algumas delas estão disponíveis dentro de simuladores. Um deles é a calculadora do Banco Central, disponível no site e como aplicativo para smartphone.

Veja duas simulações realizadas por meio de ferramentas computacionais digitais.

Na figura a seguir, temos uma simulação usando planilha eletrônica.

	A	B
1	Taxa mensal	1%
2	Número de depósitos	240
3	Depósito mensal	300
4	Valor na data do último depósito	=VF(B1;B2;-B3)

	A	B
1	Taxa mensal	1%
2	Número de depósitos	240
3	Depósito mensal	300
4	Valor na data do último depósito	R$ 296.776,61

Já se utilizarmos a calculadora do cidadão, temos o seguinte resultado.

Figura 11: Calculadora do cidadão. Função de aplicação através de depósitos regulares.

Aplicação com depósitos regulares

Simule a aplicação com depósitos regulares	
Número de meses	240
Taxa de juros mensal	1,000000 %
Valor do depósito regular (depósito realizado no início do mês)	300,00
Valor obtido ao final	299.744,38

Metodologia

Calcular | Limpar | Voltar | Imprimir

Repare que os valores são diferentes. Por que isso aconteceu?

Na metodologia usada no app do Bando Central, o valor futuro não se refere à data do último depósito, mas sim, um mês após. Ou seja, supondo que primeiro valor de R$ 300,00 tenha sido depositado em janeiro de 2022 e o último em dezembro de 2041, no Excel, a função VF calcula o acumulado em dezembro de 2041, logo após o último depósito, e a calculadora do cidadão calcula o acumulado em janeiro de 2042. De fato, o acumulado até dezembro de 2041, se transforma em 296.766,61 × 1,01 = R$ 299.744,38 em janeiro de 2042.

Aqui temos duas excelentes oportunidades didáticas para a sala de aula.

A primeira é discutir se resolvemos o problema começando usando o app Calculadora do Cidadao, para depois abordar e investigar o problema, seguido da construção do modelo matemático, ou se investigamos o problema e geramos o modelo para depois mostrar como isso poderia ser feito usando os simuladores via aplicativo ou Excel. Qual caminho, você professor, escolheria?

A segunda é não desperdiçar oportunidades. O Valor acumulado no aplicativo (app) do Banco Central e no Excel são diferentes. O professor deve aproveitar essas oportunidades para mostrar a importância do pensamento matemático (interpretar, analisar, modelar, comparar, avaliar, etc) na resolução de problemas, análise de resultados e validação das soluções do problema investigado.

Vamos agora investigar como o valor futuro se comporta em função da taxa de juro envolvida na operação financeira (investimento ou empréstimo).

Essas diferentes taxas podem gerar grandes diferenças no *VF* de uma série uniforme. Podemos investigar como a taxa influencia/impacta o *VF* total acumulado, realizando o que chamamos de análise de sensibilidade, que é uma simulação do *VF* para diferentes taxas. A tabela e o gráfico a seguir ilustram uma análise de sensibilidade para o caso de 240 depósitos mensais de 300,00 reais.

Taxa mensal (% a.m.)	Valor futuro (R$)
0,40	120.502,51
0,50	138.612,27
0,60	160.128,70
0,70	185.752,34
0,80	216.339,37
0,90	252.925,33
1,00	296.776,61
1,50	692.656,31
2,00	1.723.331,03
2,50	4.484.855,58
3,00	12.038.526,28
5,00	730.431.442,45

As simulações nos permitem fazer uma análise de sensibilidade do valor acumulado (*VF*) em relação à taxa de retorno do investimento, para um mesmo prazo. Elas nos mostram que, para uma taxa de 0,5 %, o *VF* é de R$ 138 mil, menos que a metade dos R$ 297 mil obtidos na atividade que trazia uma taxa de 1,0 % ao mês.

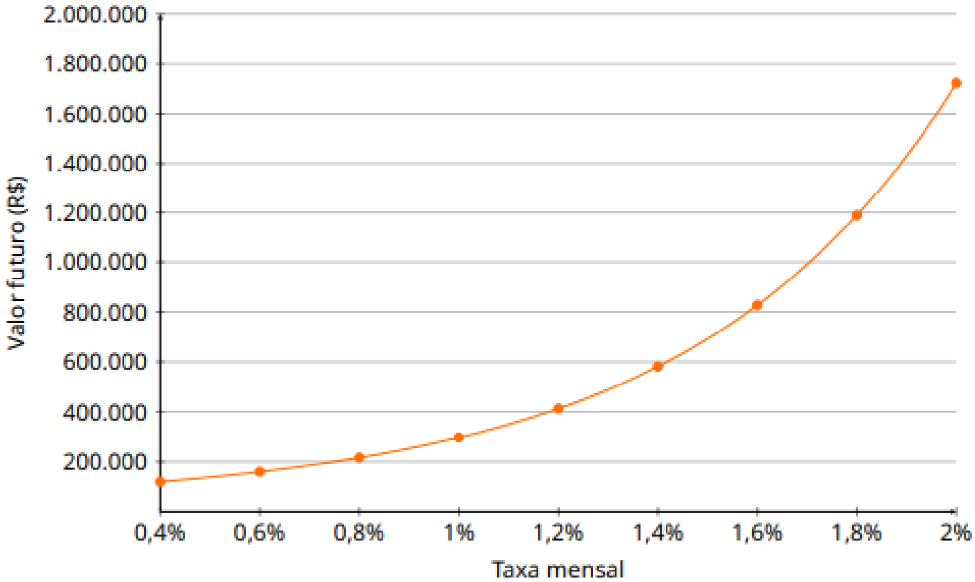


Figura 12: Sensibilidade do valor futuro à taxa mensal de retorno.

Mas como obter taxas maiores? Uma das formas de se tentar obter maiores taxas de retorno é considerar investimentos mais arriscados. Mas isso é conversa para a próxima seção

Empréstimos em parcelas iguais.

É muito comum vermos bens e serviços sendo oferecidos com opções de pagamento em parcelas mensais e iguais. Você já comprou algum produto em parcelas iguais? Ou pagou algum serviço parcelado no cartão de crédito em parcelas iguais?

Também temos situações, quando enfrentamos problemas financeiros por exemplo, em que dívidas podem ser renegociadas e pagas em parcelas mensais e iguais. A renegociação de dívidas contraídas durante a pandemia, por exemplo, pelo não pagamento de contas de luz, água, telefone, aluguel, fatura do cartão, dentre outros serviços foi o caminho usado por muitos brasileiros para quitar dívidas.

Como saber se a prestação do financiamento está correta? Como saber o número mínimo de prestações a serem pagas, diante do que posso pagar por mês? Como saber se a taxa de juro anunciada em um empréstimo a ser pago em parcelas iguais é a que realmente estão te cobrando? Um primeiro caminho é usar tecnologia disponível para ajudar a fazer os cálculos.

Vamos a um exemplo. Suponha que uma pessoa comprou um produto, cujo preço à vista sem desconto é de R$ 2.000,00, em 10 prestações mensais e iguais a uma taxa de juro de 2 % ao mês, com a primeira prestação sendo paga um mês após a compra. Qual o valor da prestação nesse caso?

Usando a calculadora do cidadão, disponível em https://www.bcb.gov.br/acessoinformacao/calculadoradocidadao, basta inserir os valores dessas variáveis.

Figura 13: Funções da calculadora do cidadão.

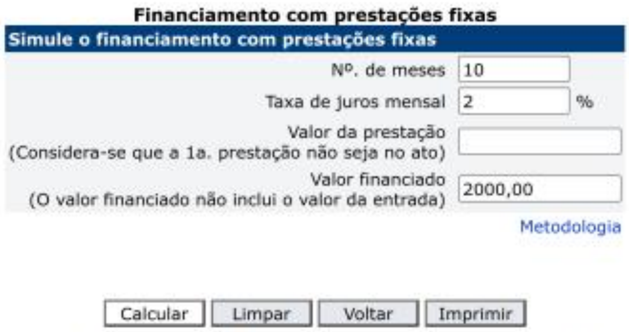


Figura 14: Calculadora de financiamento com prestações **fixas**

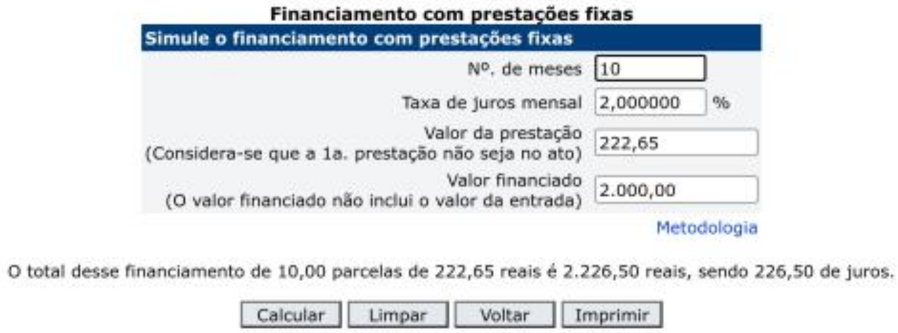


Figura 15: Resultado do cálculo.

Pela simulação, o valor da prestação é de R$ 222,65. Usar o simulador é uma forma rápida, prática e segura de se avaliar o valor da prestação e verificar se ela está de acordo com o que está sendo oferecido.

Outra vantagem desse simulador é poder calcular qualquer uma das quatro variáveis envolvidas: prestação, taxa, valor financiado e prazo, em financiamentos de parcelas iguais com a primeira sendo paga um mês a compra, sabendo-se os valores de três delas.

Uma estratégia semelhante a esta, está disponível nas planilhas eletrônicas ou nas calculadoras financeiras. No caso das planilhas, o mesmo problema poderia ser resolvido usando uma função financeira chamada `PGTO(taxa, nper, vp, [vf], [tipo])` no programa *Excel* (ou `PMT` em inglês e no *Google Sheets*), onde `taxa` é a taxa de juros, `nper` é o número de pagamentos e `vp` é o valor presente. Os parâmetros `[vf]` e `[tipo]` são opcionais e representam o valor futuro e valor lógico (1 para início do período ou 0 para final do período), respectivamente.

No *Excel*, isso pode ser feito de duas formas:

- na primeira basta escrever na célula o comando "`=PGTO(2%;10;2000)`" (é possível também colocar as células correspondentes no lugar dos valores) e teclar *Enter*, como na Figura 16;
- na segunda, é possível abrir uma janela de função de inserção (através do botão "f_x"), que fornece um tutorial, assim como na calculadora do cidadão, conforme ilustra a Figura 17.

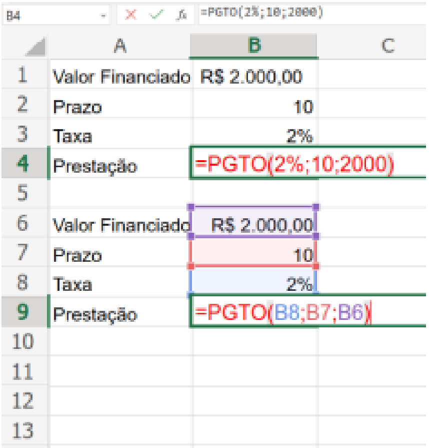


Figura 16: Comando escrito na célula.

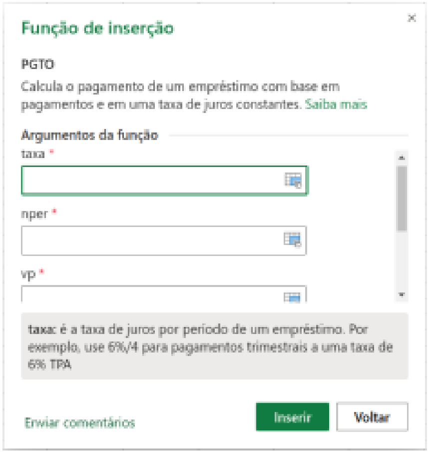


Figura 17: Função de inserção do Excel.

Como resolver matematicamente esse problema? Podemos usar a mesma noção de equivalência de capitais usada para analisar o *VF* de uma série uniforme.

Nosso problema é transformar R$ 2.000,00 hoje em 10 prestações mensais e iguais, sendo a primeira paga um mês após a data da compra.

Uma forma de abordar o problema é pensar que o valor de 2.000,00 reais será dividido em 10 partes na data da compra, e cada parte será paga nos próximos 10 meses, uma em cada mês. Cada parte é o quanto vale hoje cada uma das prestações. Lembrando que a uma taxa de 2 % ao mês, R$ 100,00 hoje valem R$ 102,00 daqui a um mês, pois $100 \times 1{,}02 = 102$, da mesma forma que $\frac{102}{1{,}02} = 100$, então podemos aplicar essa operação para todas as prestações.

A primeira prestação vale P daqui a 1 mês. Quanto eu preciso pegar emprestado hoje, para dever P reais daqui a 1 mês? A resposta é $\frac{P}{1{,}02}$.

A segunda prestação vale P reais daqui a 2 meses. Quanto eu preciso pegar emprestado hoje, para dever P reais daqui a 2 meses? A resposta é $\frac{P}{1{,}02^2}$.

Repetindo o processo para cada uma das dez prestações temos, pela equivalência de capitais, a seguinte igualdade:

$$\frac{P}{1{,}02} + \frac{P}{1{,}02^2} + \frac{P}{1{,}02^3} + \frac{P}{1{,}02^4} + \cdots + \frac{P}{1{,}02^9} + \frac{P}{1{,}02^{10}} = 2000$$

Isso é o mesmo que:

$$\frac{P}{1{,}02^{10}} + \frac{P}{1{,}02^9} + \cdots + \frac{P}{1{,}02^2} + \frac{P}{1{,}02} = 2000$$

Observe que temos no lado esquerdo da igualdade uma soma de 10 termos de uma progressão geométrica, de razão 1,02 e termo inicial $\frac{P}{1{,}02^{10}}$. Aplicando a fórmula da soma dos n primeiroa termos de uma PG, temos

$$S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$2000 = \frac{P}{1,02^{10}} \cdot \frac{(1,02^{10} - 1)}{(1,02 - 1)}$$

$$P = \frac{2000 \cdot 1,02^{10} \cdot 0,02}{(1,02^{10} - 1)}$$

$$= \text{R\$ } 222{,}65.$$

Para finalizar, vamos generalizar alguns resultados sobre séries uniformes, a partir das experiências com as investigações anteriores.

De um modo geral, o valor que se precisa investir hoje, para receber n quantias iguais a P, em suas respectivas datas, ao longo do tempo, é igual ao somatório do valor de cada uma das parcelas hoje.

Para refletir

Quanto vale uma série de n recebimentos mensais e iguais a P, a uma taxa i, um período antes dela começar?

O valor Presente de uma série uniforme, chamado de Valor Atual da Série uniforme, um período antes dela começar é igual ao somatório do valor presente de cada uma das parcelas.

Para responder a essa pergunta, podemos pensar em cada parcela separadamente e descobrir quanto precisamos depositar hoje para receber P daqui a um mês, dois meses, três meses e assim por diante até n meses. Ou seja, podemos calcular o valor presente de cada uma das parcelas de valor P. O esquema abaixo ilustra esse movimento do dinheiro no tempo.

Hoje	Parcela 1	Parcela 2	Parcela 3		Parcela n
$\frac{P}{(1+i)}$	P				
$\frac{P}{(1+i)^2}$		P			
$\frac{P}{(1+i)^3}$			P		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{P}{(1+i)^n}$					P

Assim, o valor atual (A) de uma série de n parcelas iguais e igualmente espaçadas, um período antes dela começar, é igual à soma dos valores presentes de cada uma das parcelas.

Assim, podemos concluir que

$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}.$$

Usando a fórmula da soma dos n termos de uma PG, temos

$$A = \frac{P}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$A = \frac{P}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Esse é o valor atual de uma série de n parcelas iguais a P, um período antes dela começar.

Com essa expressão, podemos analisar diversas situações envolvendo as séries uniformes, incluindo as situações envolvendo as tão famosas compras em parcelas mensais e iguais com juros. Determinar o valor da prestação, a taxa de juros embutida em um financiamento, e o prazo necessário para se atingir metas nessas situações, também podem ser feitas por meio dessa expressão.

Para refletir

Podemos ainda, a partir do valor atual da série, obter o valor futuro (VF) da mesma série, ou seja, o valor da série na data da última parcela (incluindo-a). Para isso, basta multiplicar o valor atual por $(1+i)^n$.

Nesse caso, teríamos:

$$VF = A \cdot (1+i)^n$$

$$VF = \frac{P}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)^n$$

$$VF = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Veja que essa expressão é a generalização do que tínhamos obtido como solução para a última atividade, a partir da soma de uma progressão geométrica.

$$VF = \frac{200(1{,}01^{240} - 1)}{0{,}01}$$

$$VF = \text{R\$ } 197.851{,}07$$

Vemos aqui que podemos usar diferentes objetos matemáticos, diferentes operações e com suas lógicas, para produzir significados e investigar a situação financeira posta por diferentes caminhos.

Na última atividade, vamos refletir sobre objetos matemáticos, operações e lógicas diferentes para produzir significados e investigar a situação financeira posta por diferentes caminhos.