I Encontro Nacional do Mestrado PROFMAT

Controlabilidade para Modelos de Dinâmica Populacional com Competição Interespecífica

Francis Felix Cordova Puma[1], Adriana Washington Henarejos[2],
[1,2]Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa catarina, Campus Blumenau, Santa Catarina, Brasil

Resumo

Na literatura existem muitos estudos para a estabilidade de sistemas dinamicos na biologia [4], via pontos de equilibrio, neste trabalho acrescentamos um problema matematico de controle que basicamente é um problema de existência ($\mathbf{u}$=?) para que as soluções chegem a um estado previamente estabelecido no instante de tempo T.
Consideramos uma competição de duas especies, que disputam algum recurso vital limitado, de tal modo que a presença de uma das especies inibe o crescimento da outra (Predador-presa) [4]. Esses recursos são, mais comumente, território ou alimento. Dessa forma chegamos ao conhecido modelo de Lotka-Volterra perturbado, uma vez que o sistema apresenta a função desconhecida $\mathbf{u}$ (controle externo).

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12}\frac{N_2}{K_1}\right] + \mathbf{u} \tag{1}$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21}\frac{N_1}{K_2}\right] . \tag{2}$$

As constantes r_1, r_2, K_1, K_2, b_{12} e b_{21} são todas positivas, r_1 e r_2 são taxas de nascimentos, b_{12} e b_{21} são as medidas de competitividade e K_1 e K_2 são as capacidades de suporte. Adimensionando o modelo obtemos

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_1\left[1 - x_1 - a_{12}x_2\right] + \beta_1\mathbf{u} \quad := \quad f_1(x_1, x_2, \mathbf{u}, \tau) \tag{3}$$
$$\frac{dx_2}{d\tau} = \rho x_2\left[1 - x_2 - a_{21}x_1\right] \quad := \quad f_2(x_1, x_2, \tau) \tag{4}$$

Denotando $\mathbf{z} = (x_1, x_2)^T$ e $F = (f_1, f_2)^T$, o sistema (3)-(4) com dado inicial z_0 pode ser reescrito como:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = F(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{z}(0) = z_0. \tag{5}$$

A controlabilidade exata consiste em encontrar um controle $\mathbf{u}$ para garantir que a solução de (5) atinja um valor específico $\mathbf{z_1}$ no instante de tempo T ($z(T) = z_1$), para todo $z_1 \in \mathbb{R}^2$. Nesse caso o sistema é chamado de **Sistema exatamente controlável**.

No caso linear, ou seja, quando $F(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = A\mathbf{z} + B\mathbf{u}$ a controlabilidade exata é caraterizada pelo Teorema de Kalman [3]. Como o Sistema (3)-(4) é não linear estudaremos a controlabilidade local en torno de um ponto de equilibrio, que diferente da controlabilidade exata consiste em estudar a controlabilidade numa bola de raio δ com centro num ponto de equilibrio z^* do sistema.

[1]`francis.cordova@ufsc.br`
[2]`adriana.washington07@gmail.com`

Dizemos que z^* é um ponto de equilíbrio do sistema (5) se $F(z^*, 0) = 0$.

Definição Seja um tempo $T > 0$ e z^* um ponto de equilíbrio de (5). Dizemos que (5) é **localmente controlável** en torno do ponto z^* se $\exists \delta > 0; \forall z_0, z_1 \in B_\delta(z^*)$, existe $\mathbf{u}$, um controle, de modo que a solução de (5) satisfaz $z(T) = z_1$. [2]

O seguinte Teorema garante a controlabilidade local en torno do ponto de equilibrio para o sistema que modela a competição de espécies.

Teorema O sistema de controle (3)-(4) é localmente controlável en torno a um ponto de equilibrio z^* se o sistema linearizado aproximado (6) for controlável,

$$\frac{dz}{dt} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}(z^*, 0)}_{=A} z + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u}(z^*, 0)}_{=B} u \tag{6}$$

Para a demonstração aplicamos um resultado associado à controlabilidade por órbitas [2]. Nossa contribuição é apresentar mais aplicações do controle matemático e modelagem matemática em problemas de crescimento populacional de espécies diferentes num determinado ecosistema.

Referências

[1] Baumeinster, J. e Leitão, A.. *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica.* IMPA, Rio de janeiro, 2008.

[2] Coron, J. M.. *Control and nonlinearity.* American Mathematical Society, Providence, 2007.

[3] Kalman, R. E. On the general theory of control systems, *Proceedings First International Conference on Automatic Control*, 1960. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)70094-8.

[4] Salvador, J. A., Arenales, S.. *Modelagem Matemática Ambiental.* EdUFSCar, São Carlos, 2022.