Papmem – julho de 2023

Soluções da Avaliação final

Questão 1 (valor 0,8)
A última página do álbum (página 35) começa com a figurinha de número $875-25+1=851$. As páginas anteriores (34, 33, 32, ...) começam com as figurinhas 826, 801, 776, ... Como a numeração das figurinhas especiais é sempre um múltiplo de 7, estamos procurando o maior múltiplo de 7 na progressão aritmética (1, 26, ..., 776, 801, 826, 851), sendo que a posição de cada termo dessa PA é o número da página do álbum. O maior múltiplo de 7 dessa PA é $118\cdot 7=826$, o que indica que a página procurada é a 34 (alternativa E).

Questão 2 (valor 0,8)
De acordo com o enunciado, Tia Zélia tem 10 sobrinhos cujas idades somam 110 anos. Mariana não pode ter menos do que $(110/10)=11$ anos; se tivesse, todos os sobrinhos também teriam, pois ela é a mais velha, e a soma das idades de todos seria inferior a 110. Se todos pudessem ter a mesma idade, então teríamos dez sobrinhos com 11 anos.

$$11+11+11+11+11+11+11+11+11+11=110$$

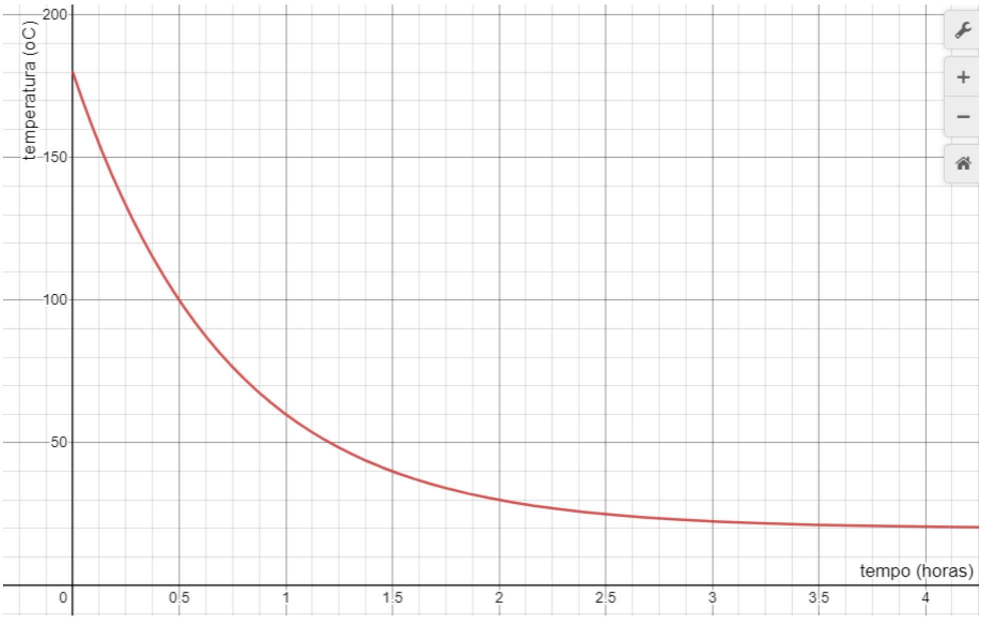
Como todos os sobrinhos de Tia Zélia têm idades diferentes, devemos ir diminuindo as idades dos sobrinhos mais novos nas parcelas acima e aumentando as idades dos sobrinhos mais velhos, até que todas as idades fiquem diferentes. Porém, ao diminuir a idade de um sobrinho mais novo em um ano, temos que aumentar a idade de um sobrinho mais velho também em um ano, para manter a soma das idades igual a 110. Vamos fazer isto aumentando a idade de Mariana de 1 em 1. Podemos proceder da seguinte forma:

- diminuindo a idade de um dos sobrinhos mais novos:
- $10+11+11+11+11+11+11+11+11+12=110$
- diminuindo a idade de dois dos sobrinhos mais novos:
- $9+10+11+11+11+11+11+11+12+13=110$
- diminuindo a idade de três dos sobrinhos mais novos:
- $8+9+10+11+11+11+11+12+13+14=110$
- diminuindo a idade de quatro dos sobrinhos mais novos:
- $7+8+9+10+11+11+12+13+14+15=110$
- diminuindo a idade de cinco dos sobrinhos mais novos:
- $6+7+8+9+10+12+13+14+15+16=110$
  Logo, a menor idade que Mariana, a sobrinha mais velha, pode ter é 16 anos.

Questão 3 (valor 1,0)

a) No instante inicial, a diferença de temperatura entre a barra e o ambiente do laboratório era de 180 – 20 = 160 graus. Depois de 30 minutos, essa diferença passou a ser 100 – 20 = 80 graus. Portanto, em um período de meia hora, a diferença se reduziu à metade. O mesmo ocorre no próximo período de meia hora. Logo, após uma hora a diferença passa a ser 80/2 = 40 e, portanto, a temperatura da barra será 20 + 40 = 60 graus.

b) Como em cada período de meia hora a diferença de temperatura (inicialmente de 160 graus) é reduzida à metade, a diferença após t horas será $160.\left(\frac{1}{2}\right)^{2t}$. Logo, a temperatura da barra será dada por $T = 20 + 160.\left(\frac{1}{2}\right)^{2t} = 20 + 160.\left(\frac{1}{4}\right)^{t}$ O gráfico é o de uma função do tipo exponencial, com *a* = 1/4 e *b* = 160, somada a um valor constante 20, que é dado na figura abaixo.



Questão 4 (valor 1,0)

(1/6) + (5/6)·(5/6)·(1/6) + (5/6)·(5/6)·(5/6)·(5/6)·(1/6) + . . . =

= (1/6) + $(5/6)^2$·(1/6) + $(5/6)^4$·(1/6) + . . .

Isso é o limite da soma de uma P.G. de primeiro termo 1/6 e razão $(5/6)^2$.

S = (1/6)/[1 – $(5/6)^2$] = (1/6)/[1 – (25/36)] = (1/6)/(11/36) = 6/11

Repare que J1 tem probabilidade maior de ganhar que J2, pois

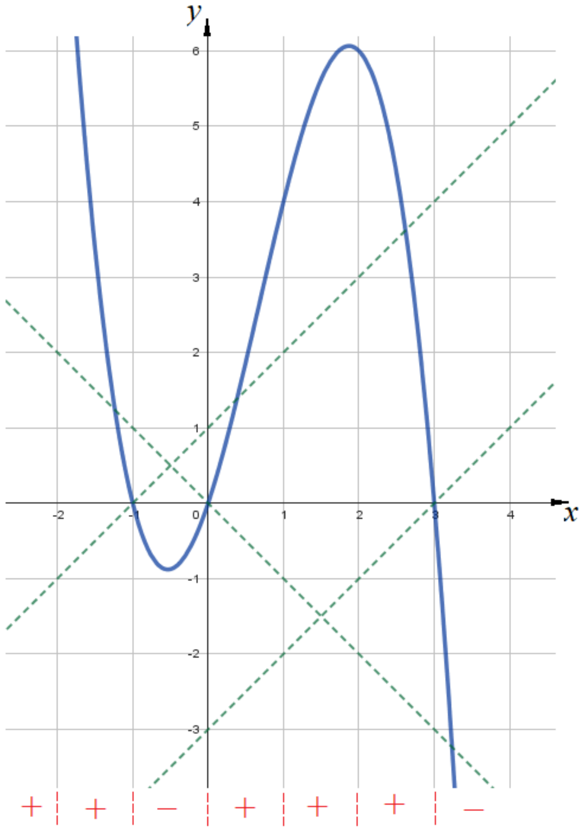
P(J1) + P(J2) = 6/11 +P(J2) = 1 $\Rightarrow$ P(J2) = 1 – 6/11 = 5/11.

Questão 5 (valor 1,0)

Chame os coelhos de B, C e P. Com eles podemos formar 3 duplas: BC, BP e CP. Escolha uma dessas duplas (3 possibilidades); para ela há 6 cartolas à disposição e para o coelho que restou há 5 possibilidades. Assim, são 3 x 6 x 5 = 90 as maneiras diferentes de uma dupla se esconder em uma cartola e o que não faz parte da dupla se esconder em uma outra cartola diferente.

Pode-se também pensar assim: Há 6 x 6 x 6 = 216 maneiras de alocar os coelhos; dessas, descontamos as 6 possibilidades dos coelhos ficarem todos juntos na mesma cartola e descontamos também as possibilidades de cada um deles ficar em cartolas diferentes (nesse último caso são 6 x 5 x 4 = 120 possibilidades). A resposta é, portanto, 216 – 6 – 120 = 90.

Questão 6 (valor 1,0)



Questão 7 (valor 1,0)

O fluxo analítico que representa os capitais investidos estão representados na planilha a seguir.

	jan/20	jan/21	jan/22	jan/23	jan/24	jan/25
saldo inicial	0,00	3.300,00	7.095,00	11.442,75	16.407,19	22.059,08
depósito	3.000,00	3.150,00	3.307,50	3.472,88	3.646,52	0,00
saldo final	3.000,00	6.450,00	10.402,50	14.915,63	20.053,71	22.059,08

Questão 8 (valor 1,0)

1. $sen\ 3\theta = sen(\pi - 4\theta)$

$= sen\pi \cdot cos4\theta - sen4\theta \cdot cos\pi$

$= 0 - sen4\theta(-1)$

$= sen4\theta.$

2. $sen4\theta = sen2(2\theta)$

$= 2sen2\theta \cdot cos2\theta$

$= 4(sen\theta \cdot cos\theta)(cos^2\theta - sen^2\theta)$

$= 4(sen\theta \cdot cos\theta)(cos^2\theta - (1 - cos^2\theta))$

$= 4(sen\theta \cdot cos\theta)(2\cos^2\theta - 1).$

3. $sen3\theta = sen4\theta \quad \Rightarrow$

$3sen\theta - 4sen^3\theta = 4sen\theta \cdot cos\theta(2\cos^2\theta - 1)$, (Obs: $sen\theta = sen\,\frac{\pi}{7} \neq 1$) $\Rightarrow$

$3 - 4sen^2\theta = 4cos\theta(2\cos^2\theta - 1) \quad \Rightarrow$

$3 - 4(1 - cos^2\theta) = 8\cos^3\theta - 4cos\theta \quad \Rightarrow$

$3 - 4 + 4\,cos^2\,\theta = 8\,cos^3\,\theta - 4cos\theta \quad \Rightarrow$
$8\,cos^3\,\theta - 4\,cos^2\,\theta - 4cos\theta + 1 = 0.$

Se $x = 2cos\frac{\pi}{7}$, da equação trigonométrica acima, x é raiz real da equação polinomial

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0. \qquad \textbf{(*)}$$

Pelo que vimos na aula, se $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, for raiz racional da equação **(*)**, então $n|1\ e\ m|1$, ou seja**,** $x \in \{1, -1\}$, mas nem 1 e nem -1 é raiz de (*), como facilmente se vê.

Conclusão,

$$x = 2cos\frac{\pi}{7} \notin \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad cos\frac{\pi}{7} \notin \mathbb{Q}\,.$$