Equação logística com condições de contorno de Robin e coeficientes indefinidos

Vitória Henrylla Pinheiro Souza [1] & Willian Cintra [1]

Universidade de Brasília [1]

vitoriahenrylla@gmail.com
willian@unb.com

Resumo

Neste trabalho, nos baseamos no artigo de Umezu [1] e estudamos existência e unicidade de soluções para a seguinte equação logística estacionária

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(g(x) - cu)u \text{ em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda h(x) u \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira $\partial\Omega$ regular, λ um parâmetro real, $g \in C^{\theta}(\overline{\Omega})$ e $h \in C^{1+\theta}(\partial\Omega)$, $0 < \theta < 1$, ambas podem mudar de sinal, $c \geq 0$ e $\eta = \eta(x)$ denota o vetor normal unitário exterior em $x \in \partial\Omega$. A equação (1) provém de um modelo em Dinâmica Populacional. Neste sentido, Ω representa o habitat de uma espécie, cuja densidade populacional é dada por $u(x)$. $-\Delta u$ descreve o movimento espacial com velocidade $1/\lambda$. Por fim, g se refere a taxa de natalidade/mortalidade, enquanto que h mede o fluxo de entrada/saída.

Com o auxílio de métodos variacionais (Multiplicadores de Lagrange e Minimização), estudamos o problema de autovalor, isto é, o problema (1) com $c = 0$. Em seguida, via método de sub e supersolução estabelecemos a existência, não existência e unicidade das soluções positivas do problema (1) com $c > 0$. Seguidamente, obtemos estimativas a priori e analisamos o comportamento assintótico das soluções com respeito ao parâmetro λ.

Introdução

Primeiro estudamos o Problema (1) com $c = 0$. Para isso, usamos um método baseado nas ideias de Hess and Kato [2], que consiste em estudar os autovalores principais $\mu = \mu(\lambda)$ do seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x) u + \mu(\lambda) u & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda h(x) u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$ dado.

Em seguida, o estudo de (1) com $c > 0$ é desenvolvido utilizando o método de sub e supersolução e os problemas de autovalores anteriores. Durante este trabalho, vamos considerar as seguintes hipóteses sobre as funções g e h.

(H_1) $g(x) \not\leq 0$ em Ω ou $h(x) \not\leq 0$ sobre $\partial\Omega$;

(H_2) $\displaystyle\int_\Omega g \, dx + \int_{\partial\Omega} h \, d\sigma < 0.$

Objetivos

1. Entender a motivação biológica do modelo (1).
2. Estabelecer a existência de autovalor principal para o Problema (2).
3. Estudar a existência de solução não-negativa e não trivial para a equação logística com coeficientes indefinidos (1).

Resultados

Para o primeiro resultado, devemos definir o seguinte conjunto

$$M = \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega), \int_\Omega g u^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} h u^2 \, d\sigma > 0 \right\}.$$

Teorema 1. Assuma (H_1), então o Problema (1) com $c = 0$ possui um único autovalor principal positivo (denotado por $\lambda_1(g,h)$) se, somente se, (H_2) ocorre. Além disso, nesse caso vale a seguinte caracterização

$$\lambda_1(g,h) = \inf \left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\displaystyle\int_\Omega g u^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} h u^2 \, d\sigma}; u \in M \right\}.$$

Ideia da demonstração:
Usar multiplicadores de Lagrange para obter autovalores principais de (2) (denotado por $\mu_1(\lambda)$).
Estudar o comportamento da aplicação $\lambda \longmapsto \mu_1(\lambda)$.

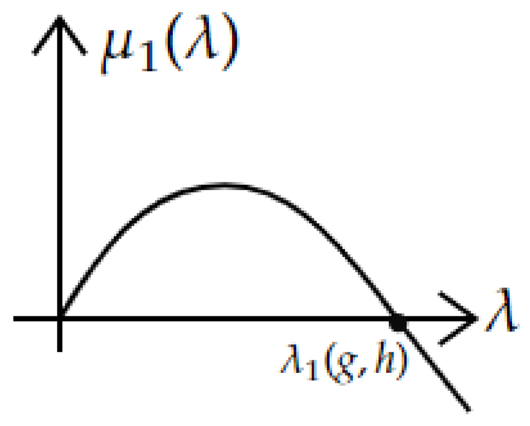

Figura 1: Gráfico de μ_1

Para o seguinte resultado, convencionamos $\lambda_1(g,h) = 0$ se $\displaystyle\int_\Omega g \, dx + \int_{\partial\Omega} h \, d\sigma \geq 0.$

Teorema 2. Assuma (H_1). Então, o conjunto de soluções positivas do Problema (1) com $c > 0$ verifica as seguintes afirmações:

- existe uma única solução positiva u_λ de (1) para todo $\lambda > \lambda_1(g,h)$;
- u_λ satisfaz a seguinte estimativa

$$\|u_\lambda\|_{L^3(\Omega)} \leq c^{-1} \left(-\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda} \right) |\Omega|^{\frac{1}{3}} \qquad \forall \lambda > \lambda_1(g,h);$$

- a solução u_λ satisfaz o comportamento assintótico,

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda_1(g,h)} u_\lambda = \frac{\max\left\{ \displaystyle\int_\Omega g \, dx + \int_{\partial\Omega} h \, d\sigma, 0 \right\}}{c|\Omega|} \text{ em } C^2(\overline{\Omega});$$

- caso $\lambda_1(g,h) > 0$ não existe solução positiva para $0 < \lambda \leq \lambda_1(g,h)$.

Ideia da demonstração:
Existência:

$$-\frac{1}{c}\left(\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda}\right)\phi_1(\lambda) \leq u_\lambda \leq \frac{-1}{c} \frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda \min_{\overline{\Omega}} \phi_1(\lambda)} \phi_1(\lambda).$$

Unicidade: usando argumentos de H. Brezis e L. Oswald [3].

Conclusão

Os resultados de existência fornecidos pelo Teorema 2 podem ser interpretados do ponto de vista do modelo do seguinte modo: caso ocorra de $\int_\Omega g \, dx + \int_{\partial\Omega} h \, d\sigma < 0$, teremos então que a velocidade influência na sobrevivência da espécie. Por outro lado, caso $\int_\Omega g \, dx + \int_{\partial\Omega} h \, d\sigma \geq 0$, a espécie irá persistir, independente da velocidade $1/\lambda$.

Referências

[1] K. Umezu. *On eigenvalue problems with robin type boundary conditions having indefinite coefficients*. Applicable Analysis, 85(11):1313–1325, 2006.

[2] Hess, P. and Kato, T. *On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function*. Comm. Partial Differential Equations, 5(10):999–1030, 1980.

[3] Brezis, H. and Oswald, L. *Remarks on sublinear elliptic equations*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. An International Multidisciplinary Journal. 1(10):55-64, 1986.

Agradecimentos

Agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, ao CNPq e ao meu orientador Dr. Willian Cintra por toda assistência para a realização deste trabalho.