O algoritmo de Bestvina-Handel para automorfismos de grupos livres

Vinícius Lima dos Santos

Universidade Federal do Pará

viniciuslattes1999@gmail.com

Resumo

Neste trabalho discutiremos um importante algoritmo em dinâmica homotópica sob o prisma das aplicações de trilhos de trem. À luz de Bestvina e Handel (1992) verifica-se uma conjectura de Thurston: todo automorfismo exterior irredutível de um grupo livre de n geradores, F_n, é representado por uma aplicação de trilho de trem.

Introdução

Apresentaremos um algoritmo que produz, para cada $\mathcal{O} \in \mathrm{Out}(F_n)$, uma equivalência homotópica (*eh*) $f : G \to G$ que representa $\mathcal{O}$. Utilizaremos a n-rosácea, R_n, para auxiliar a modelar os automorfismos. Pode-se provar que $F_n \equiv \pi_1(R_n, v)$. Assim todo $\Phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ pode ser identificado com o automorfismo induzido $f_\# \in \mathrm{Aut}(\pi_1(R_n, v))$ - induzido por uma *eh* $f : (R_n, v) \to (R_n, v)$, e vice-versa.

Um grafo marcado G é um grafo com uma *eh* $\tau : R_n \to G$. Denotaremos por $\mathcal{V}$ os vértices de G. Uma *eh* $f : G \to G$ determina um automorfismo exterior de $\pi_1(G, \tau(v))$, e portanto um $\mathcal{O} \in \mathrm{Out}(F_n)$. Assumiremos que $f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$, se adicionarmos que $f|_{G\setminus\mathcal{V}}$ é localmente injetiva, então define-se f representação topológica (*rep.top.*) de $\mathcal{O}$.

Noções Elementares

Definição 1. Uma *matriz* $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}^+)$ é irredutível se

$$\forall i, j \in [1, dim(M)], \exists N(i,j) > 0; M_{ij}^{N(i,j)} > 0.$$

Uma *rep.top.* $f : G \to G$ é irredutível (*rti*) se

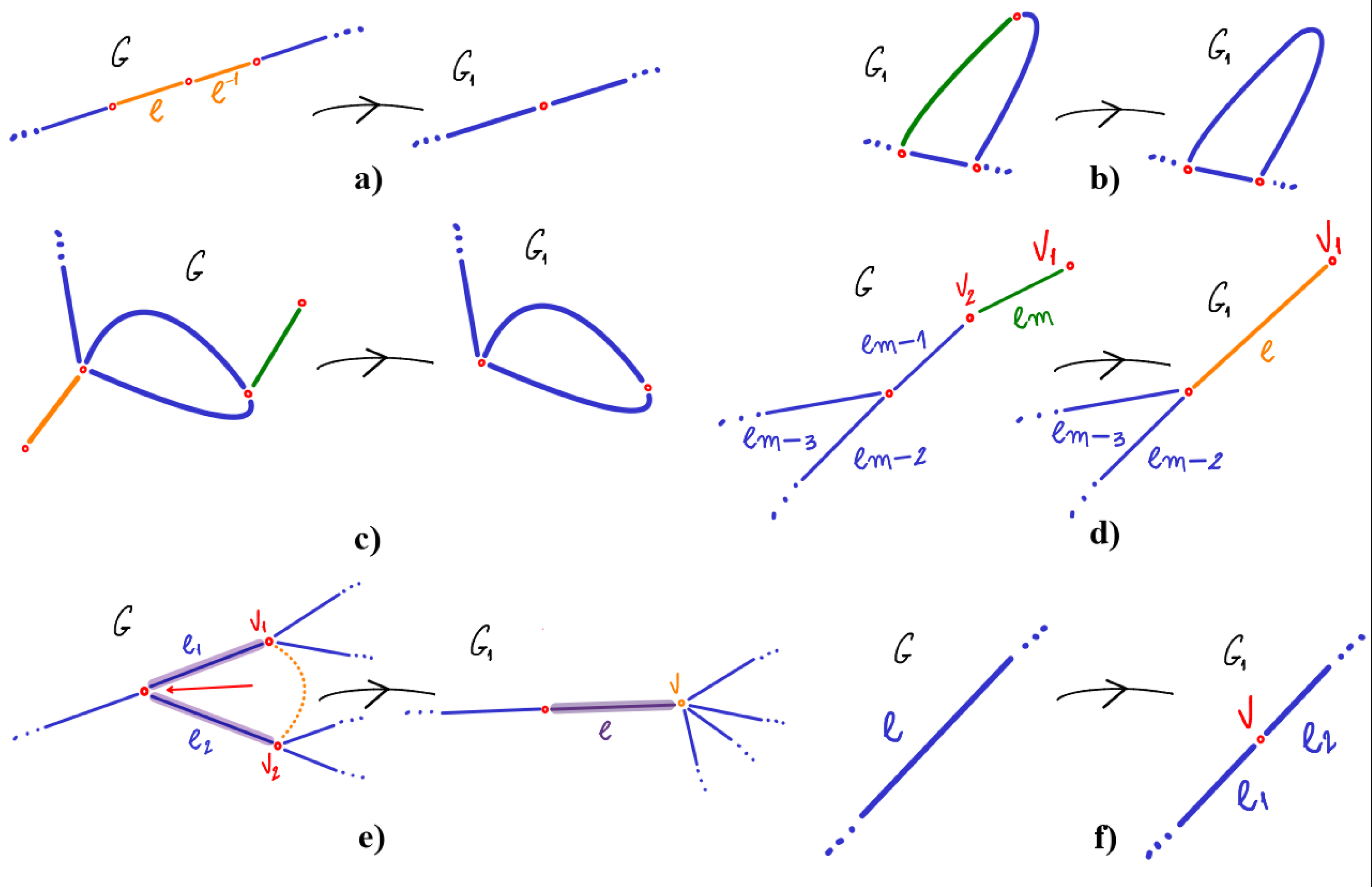
$$\nexists H \subsetneq G \text{ não trivial} ; f(H) \subseteq H.$$

A *matriz de transição* M associada a f tem $M_{ij} = \#\{e_i; f(e_j) \text{ atravessa } e_i\}$ - entenda atravessar com a interpretação de $e_i \subset f(e_j)$. Um *automorfismo exterior* $\mathcal{O} \in \mathrm{Out}(X)$ é irredutível se toda *rep.top.* $f : G \to G$ é *rti*, com $\mathcal{V}_{val1} = \emptyset$ e $\nexists \mathcal{F} \supset f(\mathcal{F})$ floresta.

Definição 2. Uma *rep.top.* $f : G \to G$ é uma *aplicação de trilho de trem* se $\forall k > 0, f^k|_{G\setminus\mathcal{V}}$ é localmente injetiva.

O Algoritmo

Começamos com um *rep.top.*, e essencialmente replicamos as seguintes operações na ordem de necessidade: **a)** *Ajustamento*, $\lambda_1 < \lambda$; **b)** *Colapso*, $\lambda_1 < \lambda$; **c)** *Homotopia de valência 1**, $\lambda_1 < \lambda$; **d)** *Homotopia de valência 2**, $\lambda_1 \leq \lambda$; **e)** *Dobra*, $\lambda_1 = \lambda$; **f)** e *Subdivisão*, $\lambda_1 = \lambda$. Consideraremos λ autovalor de Perron-Frobenius de M matriz de transição associada à *rti* $f : G \to G$, e analogamente para λ_1 obtido no processo.



Teorema 1. Todo $\mathcal{O} \in \mathrm{Out}(F_n)$ irredutível é topologicamente representado por uma aplicação de trilho de trem.

Ideia: O elemento essencial para a prova é o uso da teoria de Perron-Frobenius de matrizes inteiras. A um *rep.top.* $f : G \to G$, com $\mathcal{V}_{val1} = \mathcal{V}_{val2} = \emptyset$, podemos associar uma matriz de transição M. Verifica-se que M é irredutível se, e só se, f é *rti*. Se f *rti* não é aplicação de trilho de trem, então encontraremos $f_k : G_k \to G_k$ *rti* de $\mathcal{O}$ tal que $1 \leq \lambda_k < \lambda$ - obtendo reduções de λ pelo algoritmo. O número de arestas em G é uniformemente limitado por $3n - 3$ - devido a característica de Euler. Posto que $\lambda > min_i \sum_{i=1}^{n} M_{ij}$, existe uma escolha uniforme de l tal que $\sum_{i=1}^{n} M_{ij}^{l} \geq maxM_{ij}$. Ora, ao argumentar que o número de arestas dos grafos obtidos nas etapas permanece limitado, o λ só pode ser reduzido finitamente antes de atingir um mínimo - o momento da obtenção de uma aplicação de trilho de trem.

Exemplos

Exemplo 1. Considere $\Phi \in \mathrm{Aut}(F_3)$:

$$\Phi : \begin{array}{l} a \mapsto b \\ b \mapsto c \\ c \mapsto c^{-1}b^{-1}a^{-1} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad f_3 : \begin{array}{l} a \mapsto b \\ b \mapsto c \\ c \mapsto a^{-1} \end{array}$$

Tomando f sendo o *rep.top.* óbvio aplicando o algoritmo concluímos que logo após duas dobras obtemos $f_3 : G_3 \to G_3$ *rep.top.* que é aplicação de trilho de trem.

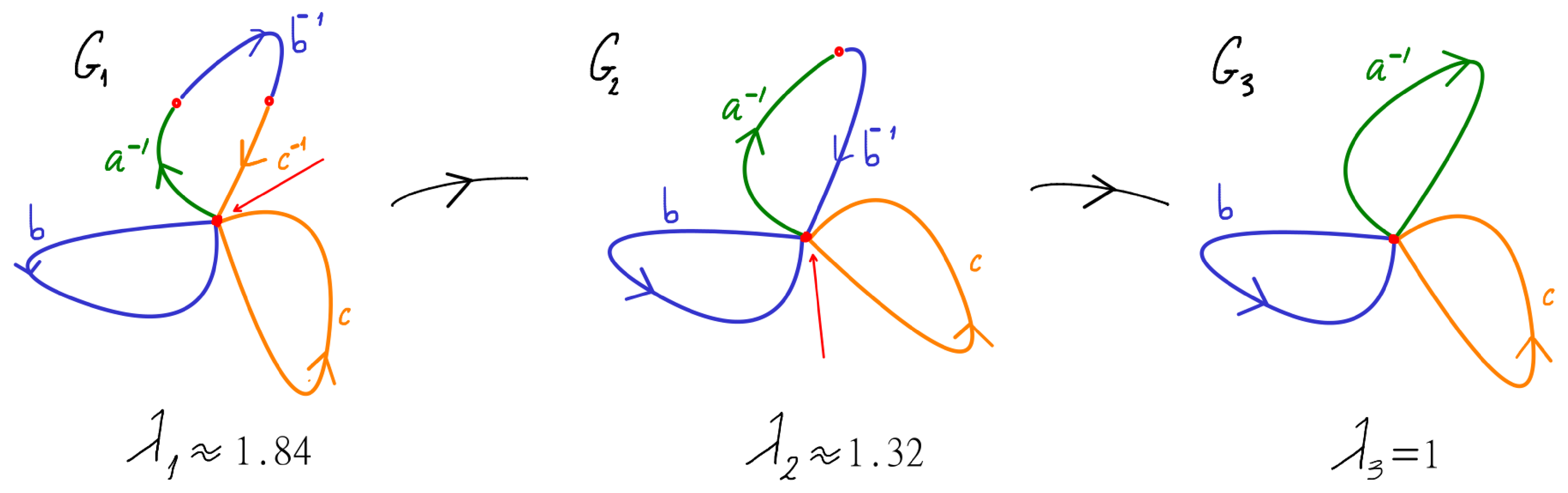


Figura 1: Obtenção de uma *rti* f_3 trilho de trem.

Exemplo 2. Considere $\Phi_n \in \mathrm{Aut}(F_3)$, para $n \geq 1$:

$$\Phi_n : \begin{array}{l} a \mapsto ac^n \\ b \mapsto c \\ c \mapsto ab \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad f_{n+2} : \begin{array}{l} a \mapsto a \\ b \mapsto c \\ c \mapsto b \end{array}$$

Tomando novamente f sendo o *rep.top.* óbvio observamos que após n colapsos na pétala ac^n, seguido por uma dobra obtemos $f_{n+2} : G_{n+2} \to G_{n+2}$ *rep.top.* que é aplicação de trilho de trem.

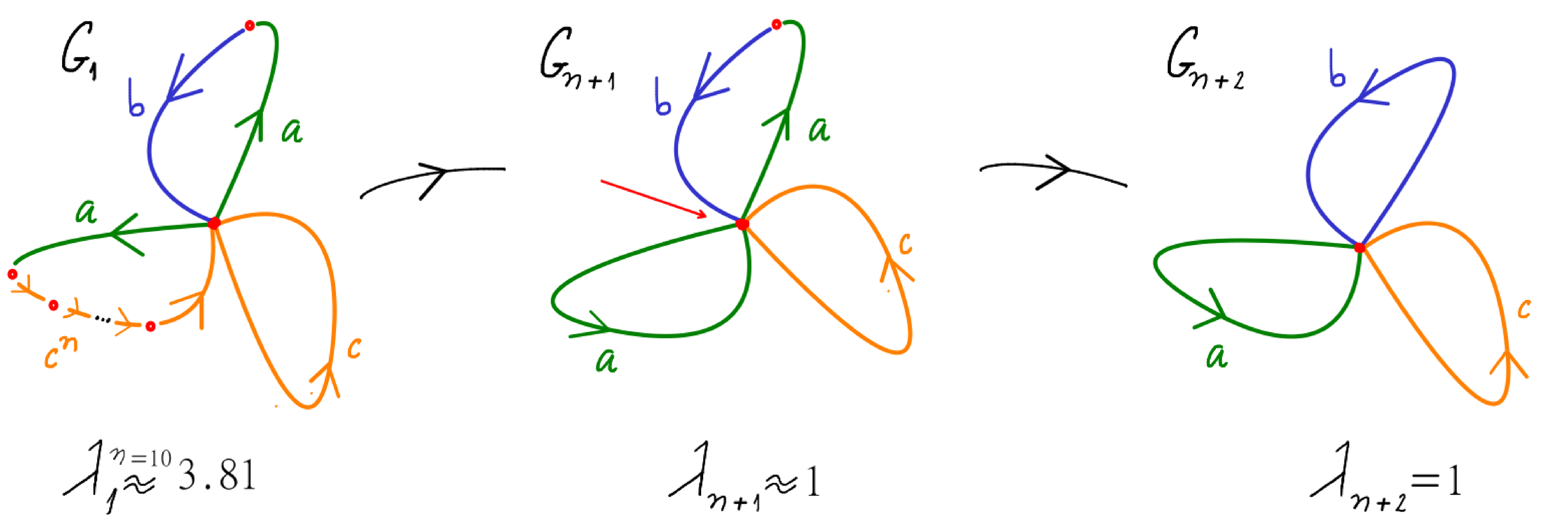


Figura 2: Obtenção de uma *rti* f_{n+2} trilho de trem.

Referências

[1] Mladen Bestvina e Michael Handel, *Train tracks and automorphisms of free groups*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 135, No. 1 (Jan., 1992), pp. 1-51

[2] Dan Margalit e Matt Clay , *Office hours with a geometric group theorist*, Princeton University Press, 2017

[3] John R. Stallings, *Topology of finite graphs*, Inventiones mathematicae, 71 (3): 551-565, 1984

[4] Oleg Bogopolski, *Introduction to Group Theory*, European Mathematical Society Publishing House, Zürich, 2008.

Agradecimentos

A Deus, à minha família, aos meus amigos, aos meus professores e ao PPGME pelo apoio, estrutura e investimento. Ao 34^o Colóquio Brasileiro de Matemática pela oportunidade e financiamento. E, em especial, ao meu orientador, Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini, por excelência e paciência. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.