A Conexão entre Álgebra e Geometria nos Teoremas dos Zeros de Hilbert.

Victor Cruz Borges (Bolsista PET-Matemática) & Victor Gonzalo Lopez Neumann

Universidade Federal de Uberlândia

victor.cruz@ufu.br, victor.neumann@ufu.br

Resumo

O objetivo central da nossa apresentação é abordar os Teoremas dos Zeros de Hilbert, os quais estabelecem relações entre ideais e variedades afins definidos sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado.

Introdução

A álgebra aborda o conceito de ideal em anéis de polinômios em várias variáveis. Um ideal pode ter polinômios com raízes em comum, formando a variedade afim. Por outro lado, podemos analisar se existem mais polinômios que se anulam nesses pontos, chamado de ideal da variedade afim. Vamos analisar se existe alguma relação entre esses conjuntos.

Conceitos Iniciais

Ao longo deste trabalho $\mathbb{K}$ denotará um corpo e n um inteiro positivo.

Definição 1. *Define-se o espaço afim de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ o conjunto*

$$\mathbb{K}^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}.$$

Definição 2. *Sejam $f_1, \dots, f_s$ polinômios em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Define-se o conjunto*

$$V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n : f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \text{para todo } 1 \leq i \leq s\}$$

como a variedade afim definida por $f_1, \dots, f_s$.

Lema 3. *([1, Proposition 1.2.2]) Se $V, W \subset \mathbb{K}^n$ são variedades afins, então $V \cup W$ e $V \cap W$ também são.*

Definição 4. *Seja $V \subset \mathbb{K}^n$ uma variedade afim. Define-se*

$$I(V) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] : f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall\, (a_1, \dots, a_n) \in V\}.$$

A observação crucial é que $I(V)$ é um ideal.

Lema 5. *([1, Proposition 1.4.6]) Se $V \subset \mathbb{K}^n$ é uma variedade afim, então $I(V) \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal. Chamaremos $I(V)$ por ideal de V.*

Os Teoremas dos Zeros de Hilbert

Um problema sério pode ocorrer quando $\mathbb{K}$ não é algebricamente fechado: Considere os três polinômios $1, 1 + x^2, 1 + x^2 + x^4$ em $\mathbb{R}[x]$. Cada um desses gera um ideal diferente

$$I_1 = \langle 1 \rangle = \mathbb{R}[x], \quad I_2 = \langle 1+x^2 \rangle, \quad I_3 = \langle 1+x^2+x^4 \rangle,$$

mas cada polinômio não tem raiz. Então, as variedades correspondentes são todas vazias:

$$V(I_1) = V(I_2) = V(I_3) = \emptyset.$$

Será que esse problema de ter ideais diferentes representando a variedade vazia desaparece se o corpo $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado?

Teorema 6 (Teorema Fraco dos Zeros de Hilbert)**.** *([1, Theorem 4.1.1]) Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado e seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal satisfazendo $V(I) = \emptyset$. Então, $I = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.*

(Problema da Consistência): Agora, será que é possível determinar se $V(f_1, \dots, f_s) = \emptyset$, isto é, se as equações $f_1 = \cdots = f_s = 0$ têm uma solução em comum?

Teorema 7 (Teorema dos Zeros de Hilbert)**.** *([1, Theorem 4.1.2]) Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. Se $f, f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots x_n]$ são tais que $f \in I(V(f_1, \dots, f_s))$, então existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $f^m \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ e vice-versa.*

Definição 8. *Um ideal I é dito radical se $f^m \in I$ para algum inteiro m implica que $f \in I$*

Definição 9. *Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. O radical de I, denotado por $\sqrt{I}$, é o conjunto*

$$\{f : f^m \in I \text{ para algum inteiro } m \geq 1\}.$$

Teorema 10 (Teorema Forte dos Zeros de Hilbert)**.** *[1, Theorem 4.2.6] Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado e seja I um ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, então*

$$I(V(I)) = \sqrt{I}.$$

Anteriormente, vimos que uma variedade $V \subset \mathbb{K}^n$ pode ser estudada ao passar para o ideal $I(V) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] : f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall\, (a_1, \dots, a_n) \in V\}$ de todos os polinômios que se anulam em V. Isto é, temos uma função

$$\begin{array}{ccc} \text{variedades afins} & \longrightarrow & \text{ideais} \\ V & \longmapsto & I(V). \end{array}$$

Por outro lado, dado um ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, podemos definir o conjunto $V(I) = \{x \in \mathbb{K}^n : f(x) = 0, \text{ para todo } f \in I\}$. O Teorema da Base de Hilbert [1, Theorem 2.5.4] nos assegura que $V(I)$ é uma variedade afim, pois de acordo com esse teorema, existe um conjunto finito de polinômios $f_1, \dots, f_s \in I$ tais que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, e [1, Proposition 2.5.9] mostra que $V(I)$ é o conjunto das raízes comuns desses polinômios. Assim, temos uma função

$$\begin{array}{ccc} \text{ideais} & \longrightarrow & \text{variedades afins} \\ I & \longmapsto & V(I). \end{array}$$

Teorema 11 (A Correspondência Ideal-Variedade)**.** *([1, Theorem 4.2.7]) Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado e as funções acima restrita a ideais radicais, então*

$$\text{variedades afins} \xrightarrow{I} \text{ideais radicais}$$

e

$$\text{ideais radicais} \xrightarrow{V} \text{variedades afins}$$

são bijetoras de inclusão reversa e inversa uma da outra.

Considerações Finais

Como consequência desse último teorema, qualquer questão sobre variedades pode ser reformulada como uma questão algébrica sobre ideais radicais (e vice-versa), desde que estejamos trabalhando sobre um corpo algebricamente fechado. Isso nos permite transitar entre a álgebra e a geometria.

Referências

[1] COX, David et al. **Ideals, varieties, and algorithms**. American Mathematical Monthly, v. 101, n. 6, p. 582-586, 1994.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Eduação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento e por todos que me apoiaram até aqui. O segundo autor agradece à FAPEMIG pelo apoio financeiro do projeto APQ-00470-22.