Teorema de Maschke

Vanessa L. Asevedo & Lorena Mara C. Oliveira

Universidade Federal de São João del-Rei

vanessalopes817@gmail.com

Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

Introdução

Através da teoria de representações de grupos, observamos que ter uma representação de um grupo G é equivalente a possuir um $K[G]$-módulo. Esses $K[G]$-módulos podem ser vistos como somas de $K[G]$-módulos irredutíveis, formando uma classe de extrema importância na teoria de módulos, conhecer condições para que esses $K[G]$-módulos sejam irredutíveis ou redutíveis a partir de características inerentes do corpo K e do grupo G ao qual eles se associam passou a ser um problema relevante. A solução para esse problema foi originalmente proposta pelo matemático alemão Heinrich Maschke, que mostrou que se a ordem do grupo G não for múltipla da característica do corpo K, então $K[G]$ é completamente redutível ou semissimples. No presente trabalho temos como objetivo apresentar a demostração do Teorema de Maschke e classificar as representações irredutíveis de $\mathbb{S}_3$ (o grupo das permutações de três elementos) sobre $\mathbb{C}$.

Resultados

Afim de provarmos o Teorema de Maschke, voltaremos nossos olhares para um conjunto de definições e resultados. Iniciemos assumindo que todos os grupos aqui mencionados, são finitos e K um corpo de característica zero.

Definição (R-Módulo Semissimples): Um R-módulo é semissimples, se todo $R-$módulo de R é um somando direto. Um $R-$anel é semissimples, se R^R é um $R-$módulo semissimples.

Definição (Representação Linear): Sejam G um grupo finito, K um corpo e V um $K-$espaço vetorial n dimensional. Chamamos de um representação linear G em V, a todo homomorfismo $\psi : G \to GL_n(V)$. A dimensão n de V sobre K é dita o grau desta representação.

As representações lineares de um grupo finito G em um k-espaço vetorial n dimensional V dão origem as chamadas ações lineares de G em V se: $1_G.v = v\ \forall v \in V$; $g.(h.v) = gh.v, \forall g, h \in G$ e $\forall v \in V$ e $g(\alpha u + \beta v) = \alpha(g.u) + \beta(g.v)$.

Estas ações lineares nos permitem considerar, com mais precisão, aquilo que gostaríamos de chamar de um G-módulo

Definição (Anel de Grupo): o anel de grupo de G sobre K como sendo o k-espaço vetorial com base $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, ou seja

$$K[G] = \oplus_{i=1}^{n} \alpha_i g_i, \alpha_i \in k, 1 \leq i \leq n.$$

com a soma usual de vetores e com uma multiplicação induzida por

$$(\alpha_i g_i)(\alpha_j g_j) = \alpha_i \alpha_j g_i g_j$$

e estendida por linearidade.

Teorema de Maschke: Sejam G um grupo finito, k um corpo. Então $k[G]$ é um anel semissimples.

Demonstração: Seja $n = |G|$. Considere V um $\mathbb{K}[G]$-submódulo à esquerda. Para mostrar $\mathbb{K}[G]$ é semissimples, precisamos mostrar $\mathbb{K}[G] = V \oplus W$, para um certo $\mathbb{K}[G]$-submódulo à esquerda W. Como todo $\mathbb{K}[G]$-módulo possui um estrutura de $\mathbb{K}$-espaço vetorial, podemos escrever $\mathbb{K}[G] = V \oplus U$, onde U é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Considere a projeção linear $\pi : \mathbb{K}[G] \to V$, com núcleo U associada a decomposição $\mathbb{K}[G] = V \oplus U$. Assim π é uma aplicação $\mathbb{K}$-linear, mas não necessariamente $\mathbb{K}[G]$-linear. Desta forma, construiremos a partir de π uma aplicação $\mathbb{K}[G]$-linear. Defina $\pi^* : \mathbb{K}[G] \to \mathbb{K}[G]$, dada por

$$\pi^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g^{-1} \pi(gx)$$

Mostraremos que $\pi^*(\mathbb{K}[G]) = V$ e que $\mathbb{K}[G] = V \oplus (id - \pi^*)(\mathbb{K}[G])$, como $\mathbb{K}[G]$-módulos.

Tomando $y \in \mathbb{K}[G]$ e $g \in G$, segue que $\pi(gy) \in V$, de onde se deduz que

$$\pi^*(gy) = \frac{1}{n} \sum_{h \in G} h^{-1} \pi(hgy) \in V.$$

Além disso $sex \in V$ temos $\pi^*(x) = x-$ ou seja $Im\pi^* = V$, mais ainda $(\pi^*)^2 = \pi^*$. Logo π^* é uma projeção e segue que

$$\mathbb{K}[G] = \pi^*(\mathbb{K}[G]) \oplus (id - \pi^*)(\mathbb{K}[G]) = V \oplus (id - \pi^*)(\mathbb{K}[G]).$$

Resta mostrar que π^* é um $K[G]$-homomorfismo. Para tanto considere $h \in G, x \in K[G]$. Então temos

$$\pi^*(hx) = h\pi^*(x), \forall x \in G, x \in \urcorner[G].$$

Assim, tomando um elemento qualquer de W, da forma $(id - \pi^*)(x)$, obtemos $h((id - \pi^*)(x)) = hx - \pi^*(hx) = (id - \pi^*)(hx) \in W.$

Corolário: Sejam G um grupo finito de ordem n, K um corpo algebricamente fechado (de característica zero). Então

$$K[G] \simeq M_{n1}(\mathbb{K}) \oplus \dots M_{nr}(\mathbb{K}).$$

onde $n = n_1^2 + \cdots + n_r^2$. Além disso, $k[G]$ possui exatamente r módulos simples não isomorfos de dimensões respectivamente iguais a $n_1, n_2, \dots, n_r$ sobre K e r coincide com o número de classes de conjugação de G.

Exemplo: Considere S_3={(1),(12),(13),(23),(123),(132)}, $|S_3| = 6$, como o grupo das permutações dos símbolos $1, 2$ e 3. Vamos classificar as representações irredutíveis de S_3 em $\mathbb{C}$. Sabemos que S_3 é um grupo gerado por dois elementos, digamos τ e σ, sujeito as seguintes relações: $\tau^2 = (1), \sigma^3 = (1)$ e $\sigma\tau = \tau\sigma^2.$ Além disso, segue que existem 3 classes de conjugação em S_3, a saber, $C_1 = \{(1)\}$ e $C_2 = \{(12), (13), (23)\}$ e $C_3 = \{(123), (132)\}$. Com base nessas informações, temos que $\mathbb{C}S_3$ tem três componentes simples:

$$\mathbb{C}S_3 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$$

Como $\mathbb{C}S_3$ tem dimensão 6 sobre os Complexos, sabemos que a soma das dimensões de A_1, A_2, A_3 também deve ser 6. Como estamos tratando de anéis de matrizes com entradas em $\mathbb{C}$, nossa única possibilidade é

$$\mathbb{C}S_3 = M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}).$$

Portanto, não existe nenhum subespaço unidimensional de V que fique fixo pela ação de S_3, isto é, V não possui nenhum $\mathbb{C}S_3$-submódulo próprio, ou ainda, V é um $\mathbb{C}S_3$-módulo simples e, portanto, V é uma representação irredutível de grau 2 de S_3 sobre $\mathbb{C}$. Completamos assim a classificação das representações lineares irredutíveis de S_3 sobre $\mathbb{C}$.

Conclusão

Através do Teorema de Maschke somos capazes de classificar todas as representações irredutíveis de um grupo finito G de maneira geral e sem necessariamente explicita-las, uma vez que, quando o teorema se aplica, qualquer representação é uma soma direta de representações irredutíveis.

Referências

[1] SANT'ANA, ALVERI ALVES. Uma introdução ao estudo dos anéis semissimples. 2016.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Federal de São João del-Rei, em especial, ao Departamento de Matemática e Estatística e, ao fomento recebido.