Classificação das álgebras $*$-simples

Vanessa Coelho dos Santos[1]
Lorena Mara Costa Oliveira[2]
Universidade Federal de São João del-Rei
[1]vanessasantoscoelho6@gmail.com
[2]lorena.oliveira@ufsj.edu.br

Resumo

Uma involução em uma álgebra é um antiautomorfismo de ordem no máximo 2, ou seja, é uma aplicação linear $*: A \to A$ tal que $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^*a^*$, para todos $a, b \in A$. Assim, nomeia-se por $*$-álgebra uma álgebra munida com uma involução $*$. Dizemos que uma $*$-álgebra é uma álgebra $*$-simples se $A^2 \neq \{0\}$ e os únicos $*$-ideiais de A são $\{0\}$ e A. Neste trabalho, iremos classificar as álgebras $*$-simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Introdução

Uma involução é um antiautomorfismo de ordem no máximo 2, ou seja, uma aplicação linear $*: A \to A$ tal que $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^*a^*$, para todos $a, b \in A$. Assim, nomeia-se por $*$-álgebra uma álgebra munida com uma involução $*$.

Exemplo 1

Pode-se observar que as únicas involuções na álgebra de matrizes $n \times n$ sobre um corpo F são a involução transposta e a involução simplética, quando n é par.
Na álgebra $M_n(F)$ a aplicação

$$\begin{aligned} t: M_n(F) &\to M_n(F) \\ (a_{ij}) &\mapsto (a_{ji}) \end{aligned}$$

é uma involução chamada de *involução transposta*.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

E, a álgebra $M_{2n}(F)$ pode ser munida por uma *involução simplética*, denotada por s, dada por

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} E^t & -C^t \\ -D^t & B^t \end{pmatrix}$$

Definição

Seja A_1 e A_2 duas álgebras munidas, respectivamente, com as involuções ψ_1 e ψ_2. Dizemos que essas álgebras são isomorfas como álgebras com involução, se existe um isomorfismo de álgebras $\varphi: A_1 \to A_2$, tal que, $\varphi(a^{\psi_1}) = \varphi(a)^{\psi_2}$, para todo $a \in A_1$

Exemplo 2

Se A é uma álgebra e $B = A \oplus A^{op}$. A aplicação $\lozenge : B \to B$, dada por $(a_1, a_2)^{\lozenge} = (a_2, a_1)$, para todos $a_1, a_2 \in A$ é uma involução em B, chamada *involução troca*. Em que A^{op} é a álgebra oposta de A com a mesma estrutura de espaço vetorial de A, e o produto em A^{op} é definido por $a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1$, para todos $a_1, a_2 \in A$.

Exemplo 3

Para definir um isomorfismo de $*$-álgebras considere $B = I \oplus I^*$. A aplicação $\overline{*} : B \to B$ dada por $(a_1, a_2^*)^{\overline{*}} = (a_2, a_1^*)$ é uma involução em B. Considere a álgebra $C = I \oplus I^{op}$ munida com a involução troca. A aplicação $\phi : B \to C$, tal que, $\phi(a, b^*) = (a, b)$ é um isomorfismo de $*$-álgebras.

Definição

Seja A uma $*$-álgebra. Um ideal I de A é um $*$-ideal se $I^* = I$. Dizemos que uma $*$-álgebra é uma álgebra $*$-simples se $A^2 \neq \{0\}$ e os únicos $*$-ideais de A são $\{0\}$ e A.

Objetivo

Mostrar que uma álgebra $*$-simples A de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero ou é isomorfa a $M_n(F)$ com involução transposta ou simplética, ou é isomorfa a $M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$ com involução troca.

Resultados

Teorema: Seja A uma álgebra $*$-simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então A, ou é isomorfa a $M_n(F)$ com involução transposta ou simplética, ou é isomorfa a $M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$ com involução troca.

Demonstração. Por hipótese, A é uma $*$-álgebra. Logo, $J(A)$ é um $*$-ideal de A. E, como A é uma álgebra $*$-simples, então ela possui apenas dois $*$-ideais, A e $\{0\}$. Como vimos que $J(A)$ é um $*$-ideal de A podemos concluir que, ou $J(A) = A$ ou $J(A) = \{0\}$. Assim, conclui-se que $J(A) = \{0\}$ porque $J(A)$ é nilpotente e A não é. Então, A não é nilpotente e $J(A) = \{0\}$ é um $*$-ideal de A. Logo, A é uma álgebra semissimples.
Considere I um ideal simples não nulo de A.
Se I é um $*$-ideal não nulo de A e A é um álgebra $*$-simples, então $I = A$, e assim, $A \cong M_n(F)$ munida com involução transposta ou com involução simplética (caso n seja par).
Suponha que I não é um $*$-ideal de A. Considere que $B = I \oplus I^*$, e claramente, B é um $*$-ideal de A. Dessa forma, temos que $A = B$, pois A é $*$-simples, e assim, $A \cong M_n(F) \oplus M_n(F)^*$. Em luz do Exemplo 3, a álgebra $A \cong M_n(F) \oplus M_n(F)^*$ com involução $\overline{*}$ dada por $(a_1, a_2^*)^{\overline{*}} = (a_2, a_1^*)$ é isomorfa como $*$-álgebra a $A \cong M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$ com involução troca. □

Conclusão

Seja A uma álgebra $*$-simples A de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então A, ou é isomorfa a $M_n(F)$ com involução transposta ou simplética, ou é isomorfa a $M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$ com involução troca.

Referências

[1] OLIVEIRA,LORENA. Variedades de álgebras G-graduadas com involução graduada de crescimento quase polinomial. Impa, 2022.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Federal de São João del-Rei, em especial, ao Departamento de Matemática e Estatística e, ao fomento recebido.