Grafos expansores, o produto zig-zag e o problema da conexidade em grafos

Théo Borém Fabris

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo

theobf@usp.br

IME INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Resumo

Objetivo deste trabalho é apresentar o algoritmo de Reingold [1] para o problema da conexidade em grafos com consumo de espaço logarítmico. Como esse resultado envolve alguns conceitos sobre grafos expansores e sobre o produto zig-zag de grafos, também serão apresentados algumas definições e alguns teoremas necessários. Tais resultados utilizam ideias oriundas da teoria espectral dos grafos e da teoria de probabilidade, criando interessantes conexões entre essas áreas.

Problema da conexidade em grafos

O **problema da conexidade em grafo (USTCON)** é definido da seguinte forma: Dado um grafo não-dirigido G e dois vértices s e t de G, decida se existe um caminho em G entre s e t. Dado sua simplicidade e ubiquidade como subrotina em diversos algoritmos para outros problemas combinatórios, surge naturalmente o interesse em entender os requerimento computacionais para resolver o problema USTCON (ou sua versão como problema de busca). O estudo da complexidade do consumo de espaço para o USTCON é algo que vem sendo estudado há algumas décadas e diversas abordagem foram propostas para tentar obter consumo de espaço logarítmico: algoritmo de passeios aleatórios em grafos, geradores pseudo-aleatórios, dentre outras. Do ponto de vista prático, algoritmos com consumo de espaço logarítmico para o USTCON são interessantes quando o grafo é grande o suficiente para que algoritmos com consumo de espaço linear (BFS e DFS) sejam inviáveis.

Alguns resultados da teoria espectral dos grafos

Seja G um grafo D-regular com conjunto de vértices $[N] := \{1, \dots, N\}$. Esse grafo pode ter arestas paralelas ou laços. Considere que, para cada vértice v de G, é fixada uma rotulação arbitrária das arestas incidentes em v utilizando o conjunto $[D]$.

O **rotational map** de G é a função $\mathrm{Rot}_G \colon [N] \times [D] \to [N] \times [D]$ tal que, para todos $v, w \in [N]$ e $i, j \in [D]$, $\mathrm{Rot}(v, i) = (w, j)$ se a i-ésima aresta e de v tem w como outra extremidade e a aresta e é a j-ésima aresta de w.

A **matriz de adjacência normalizada** de G é a matriz $A_G \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que, para todos $u, v \in [N]$,

$$A_G(u, v) := \frac{1}{D} |\{ (i, j) \in [D]^2 : \mathrm{Rot}_G(u, i) = (v, j) \}|.$$

Denota-se por $\lambda(G)$ o **segundo maior autovalor** de A_G em valor absoluto. Dizemos que um grafo H é um **(N, D, λ)-grafo** se H tem N vértices, é D-regular e $\lambda(H) \leq \lambda$.

O seguinte teorema fornece um cota superior para $\lambda(G)$ para grafos não-bipartidos e conexos.

Teorema 1. (Alon e Sudakov, 2000) Se G é um grafo com N vértice, D-regular, conexo e não-bipartido, então $\lambda(G) \leq 1 - 1/(DN^2)$. ■

O seguinte teorema permite estimar o número de arestas entre dois conjunto de vértices de G utilizando o parâmetro $\lambda(G)$ e permite limitar o diâmetro de um (N, D, λ)-grafo.

Teorema 2. (Expander Mixing Lemma) Se G é um (N, D, λ)-grafo, então, para todos $S, T \subseteq V$,

$$\left| |E(S, T)| - \frac{D|S||T|}{N} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|},$$

onde $E(S, T) = \{ (u, v) \in S \times T \mid uv \in E_G \}$. ■

Corolário 3. Seja G um grafo conexo. Defina a **distância** entre dois vértices de G como o comprimento de um caminho mais curto entre esses vértices. Denote o **diâmetro** de G (a maior distância entre dois vértices de G) por $\mathrm{diam}(G)$. Se G é um (N, D, λ)-grafo, então $\mathrm{diam}(G) = \mathcal{O}(\log n)$. ■

Para $t \in \mathbb{N}$, a ***t*-ésima potência** G^t de um grafo G é o grafo com mesmo conjunto de vértices de G e com uma aresta entre dois vértices u e v se e somente se existe um passeio de tamanho t entre u e v em G.

Teorema 4. Se G é um (N, D, λ)-grafo, então, para todo $t \in \mathbb{N}$, o grafo G^t é um (N, D^t, λ^t)-grafo. ■

Produto zig-zag de grafos

Sejam G um (N, D, λ)-grafo e H um (D, d, α)-grafo. O **produto zig-zag** $G ⓩ H$, introduzido e analisado em [2], é o grafo d^2-regular com conjunto de vértices $[N] \times [D]$ e com rotational map definido conforme a Figura 1.

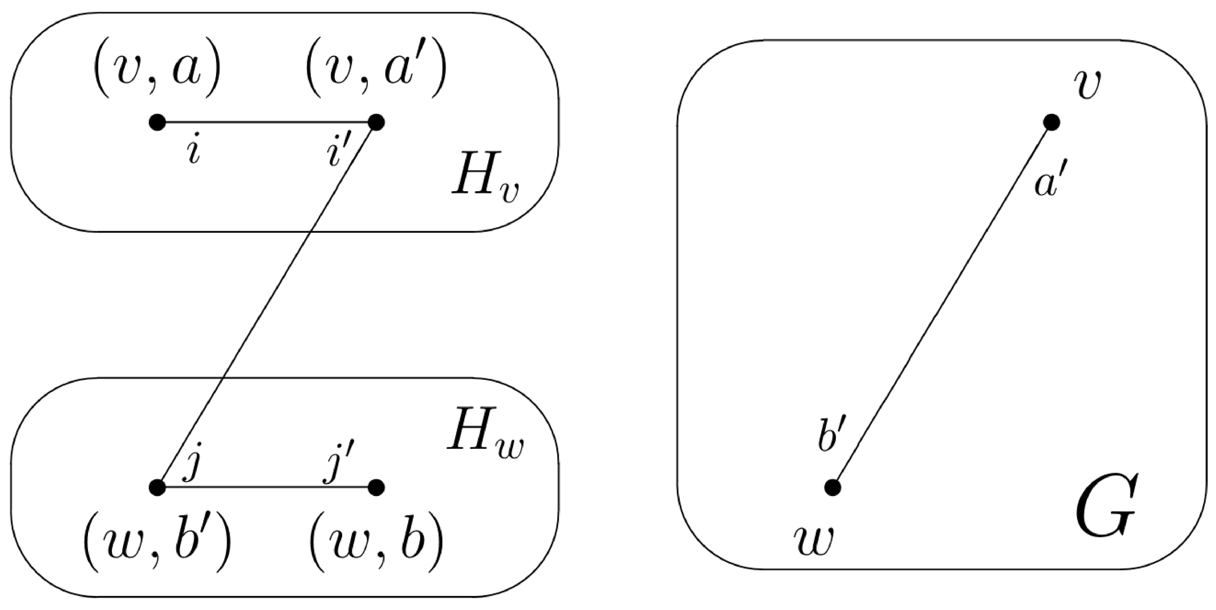

Figura 1: Define-se $Rot_{G ⓩ H}((v, a), (i, j)) := ((w, b), (j', i'))$. Figura extraída do artigo [1].

Para os grafos G, H e $G ⓩ H$ definidos acima, vale o seguinte resultado.

Teorema 5. O grafo $G ⓩ H$ é um $(ND, d^2, f(\lambda, \alpha))$-grafo, onde

$$f(\lambda, \alpha) = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)\lambda + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 \lambda^2 + 4\alpha^2}.$$

Assim, vale que $1 - \lambda(G ⓩ H) \geq \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)(1 - \lambda)$. ■

Algoritmo de Reingold

Ideia: Para resolver um problema de conexidade em um grafo, primeiro aumente a conexidade dele.

1. Seja H um $(D^{16}, D, 1/2)$-grafo (sabe-se que existe uma constante D tal que um grafo desse tipo existe).
2. Transforme o grafo G (com N vértices) fornecido como entrada em um grafo G_{reg} com N^2 vértices e D^{16}-regular. Essa operação preserva as componentes de G e as transforma em grafos não-bipartidos.
3. Defina o grafo $G_{exp} := G_l$, com $l := 2\lceil \log(DN^2) \rceil$, onde $G_0 := G_{reg}$ e, para todo $i > 0$, $G_i := (G_{i-1} ⓩ H)^8$. Pode-se mostrar que as componentes de G_{reg} serão preservadas em G_{exp} e serão não-bipartidas. Além disso, usando que $\lambda(H) \leq 1/2$ e os teoremas 1 e 5, conclui-se que $\lambda(G_{exp}) \leq 1/2$.
4. Pelo Corolário 3, o diâmetro de G_{exp} é logarítmico. Como G_{exp} é D^{16}-regular, é possível iterar sobre todos os passeio de comprimento $\mathcal{O}(\log n)$ que começam em s, checando se t pertence a algum deles.

Referências

[1] Omer Reingold. Undirected connectivity in log-space. *J. ACM*, 55(4):Art. 17, 24, 2008.

[2] Omer Reingold, Salil Vadhan, and Avi Wigderson. Entropy waves, the zig-zag graph product, and new constant-degree expanders. *Ann. of Math. (2)*, 155(1):157–187, 2002.

Agradecimentos

Este trabalho recebeu auxílio financeiro da FAPESP (processo 2022/09280-5).