Teorema de Kapranov: curvas tropicais como limite de amebas

Sheucíer Alves & Flaviana Ribeiro & Joana Cruz

Universidade Federal de Juiz de Fora

sheucier@gmail.com

Introdução

Neste trabalho mostraremos como obter uma curva tropical a partir de uma curva algébrica complexa plana, usando o Teorema de Kapranov, que mostra a equivalência entre curva tropical definida como limite de amebas e curva tropical definida como lugar geométrico associado a um polinômio tropical.

Curvas tropicais

Na álgebra tropical, trabalhamos com o semicorpo tropical $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, com as operações de adição e multiplicação: $a \oplus b = \max\{a, b\}$ e $a \odot b = a + b$.

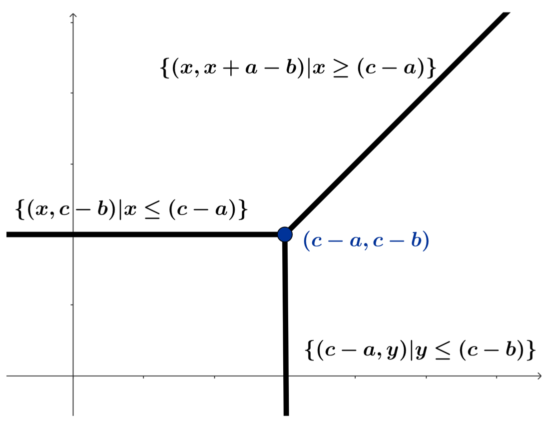
Um polinômio tropical de duas variáveis é definido como:

$$p(x, y) = \bigoplus_{i+j=0}^{d} (a_{i,j} \odot x^i \odot y^j) = \max_{i,j}\{a_{i,j} + ix + jy\}.$$

Definição 1. A curva tropical definida por $p(x, y)$ é o conjunto dos pontos (x_0, y_0) de $\mathbb{T}^2$ para os quais existam pares $(i, j) \neq (k, l)$ que verifiquem

$$p(x_0, y_0) = a_{i,j} + ix_0 + jy_0 = a_{k,l} + kx_0 + ly_0.$$

Exemplo 1. Chamamos de reta tropical a curva definida por $p(x, y) = (a \odot x) \oplus (b \odot y) \oplus c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.



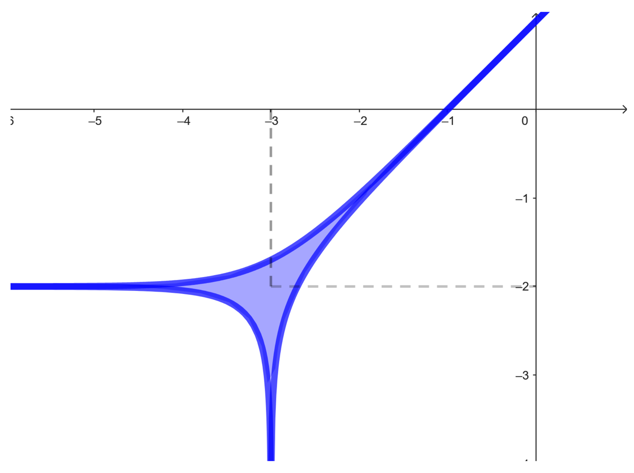
Ameba de uma curva complexa

Seja C uma curva plana complexa e considere a função:

$$\begin{aligned} Log\colon (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z = (z_1, z_2) &\longmapsto (x_1, x_2) := (\log|z_1|, \log|z_2|). \end{aligned}$$

O subconjunto $A = Log(C \cap (\mathbb{C}^*)^2) \subset \mathbb{R}^2$ é chamado de ameba da curva C.

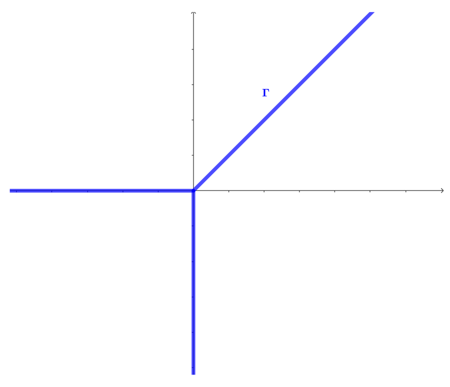
Exemplo 2. A ameba da curva $C : e^3 z_1 + e^2 z_2 = 1$ está representada a seguir. Note um "centro" em $(-3, -2)$.



Para transformar as amebas em objetos combinatórios, consideramos, para $t \in \mathbb{R}$ positivo, a aplicação

$$\begin{aligned} Log_t\colon (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (-\log_t|z_1|, -\log_t|z_2|), \end{aligned}$$

e estudamos o limite de $Log_t(C \cap (\mathbb{C}^*)^2)$ quando t tende a 0. O resultado desse limite para a curva C do Exemplo 2 é a figura abaixo.



Observe que, ao fazermos t tender a 0 no Exemplo 2, além de reduzirmos a zero a largura da ameba, transladamos seu centro para a origem. Para evitar isso, consideraremos a família de curvas $C_t : t^{-3}z_1 + t^{-2}z_2 = 1$, para $t \in \mathbb{R}$, cujas amebas têm centro em $(-3, -2)$. Assim, quando fizermos t tender a 0, a curva limite ainda terá centro em $(-3, -2)$.

Teorema de Kapranov

Para evitar o processo de limite, trocamos $\mathbb{C}$ pelo corpo K das séries de Puiseux sobre os complexos, ou seja, cada $a \in K$ é uma série formal $a = \sum_{q\in\mathbb{Q}} a_q t^q$, na variável t, $a_q \in \mathbb{C}, \forall q \in \mathbb{Q}$, o subconjunto $\{q \in \mathbb{Q}; a_q \neq 0\}$ é limitado inferiormente e o conjunto dos denominadores é finito. A *valorização* de $a \in K^*$, $\mathrm{val}(a)$, é o menor racional q tal que $a_q \neq 0$ e $\mathrm{val}(0) = \infty$. Note que podemos escrever:

$$a = \sum_{q\in\mathbb{Q}} a_q t^q = a_{\mathrm{val}(a)} t^{\mathrm{val}(a)} \left(1 + \sum_{\substack{q\in\mathbb{Q} \\ q\neq \mathrm{val}(a)}} \frac{a_q}{a_{\mathrm{val}(a)}} t^{q-\mathrm{val}(a)}\right),$$

e, para t pequeno, temos:

$$\log_t|a| \approx \log_t|a_{\mathrm{val}(a)} t^{\mathrm{val}(a)}| = {}_{\mathrm{val}}\, a + \log_t|a_{\mathrm{val}(a)}| \approx {}_{\mathrm{val}}(a).$$

Assim, aplicar Log_t e depois fazer o limite quando t tende a 0, corresponde à aplicação:

$$\begin{aligned} \mathrm{Val}\colon (K^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (x_1, x_2) := (-\mathrm{val}(z_1), -\mathrm{val}(z_2)). \end{aligned}$$

Definição 2. Uma curva plana tropical é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ da forma $\mathrm{Val}(C \cap (K^*)^2)$, onde $C \subset K^2$ é o conjunto dos zeros de um polinômio $f(z_1, z_2) \in K[z_1, z_2]$.

Definimos a ameba do polinômio

$$f(z_1, z_2) = \sum_{(i,j)\in I} c_{i,j} z_1^i z_2^j \in K[z_1, z_2],$$

tal que $c_{i,j} \in K^*$, como $A_f = \mathrm{Val}(Z_f) \subset \mathbb{R}^2$, onde $Z_f = \{(z_1, z_2) \in K^2; f(z_1, z_2) = 0\}$.

Teorema de Kapranov: *A ameba A_f coincide com a curva tropical definida pelo polinômio*

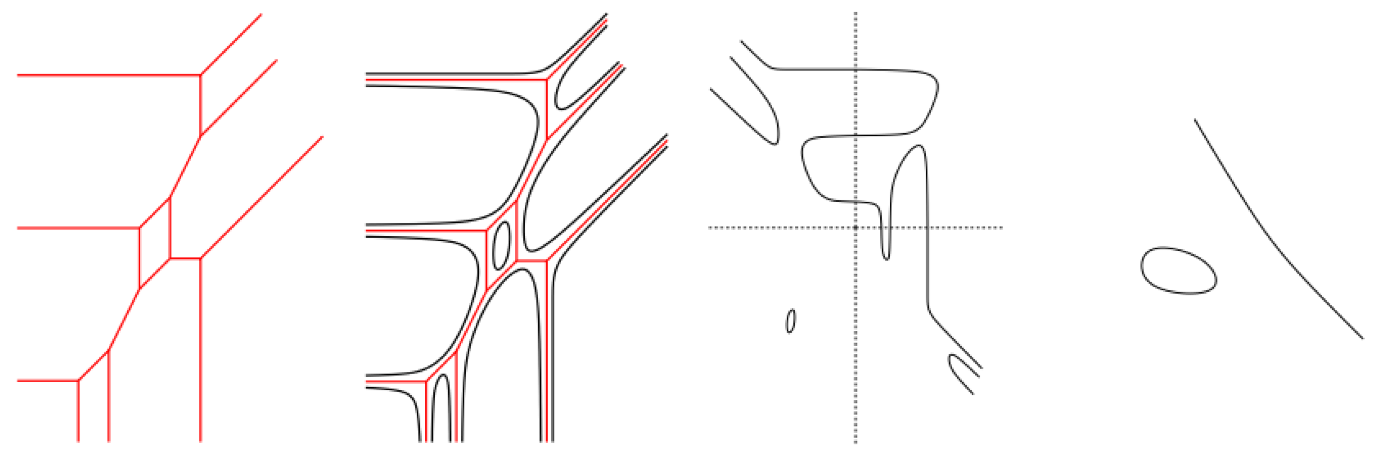
$$f_{trop}(x_1, x_2) = \bigoplus_{(i,j)\in I} -val(c_{i,j}) \odot x_1^{\odot i} \odot x_2^{\odot j}.$$

Demonstração: Ver [3].

Aplicação do Teorema de Kapranov

O Teorema de Kapranov é uma ferramenta essencial para a técnica de *patchwork* que permite, de uma maneira puramente combinatória, construir curvas algébricas planas reais a partir de curvas tropicais. O patchwork permite responder, em casos particulares, o $16°$ problema de Hilbert que, em linhas gerais, propõe a construção de uma lista de possíveis arranjos de curvas algébricas reais de um dado grau.

Exemplo 3. A figura abaixo mostra uma curva tropical C de grau 3, a ameba que converge para C quando $t \to 0$, a curva tropical real $C_{\mathbb{T}}$, obtida pelo patchwork, e a curva algébrica real plana com o mesmo arranjo de $C_{\mathbb{T}}$, respectivamente.



Referências

[1] A. Gathmann. **Tropical Algebraic Geometry**. ArXiv:math/0601322

[2] E. Brugallé, I. Itenberg, G. Mikhalkin, K. Shaw. **Brief introduction to tropical geometry.** Proceedings of the Gökova Geometry-Topology conference, 2015, pp.1-75.

[3] E. Shustin, (2002). **Patchworking singular algebraic curves, non-Archimedean amoebas and enumerative geometry**. ArXiv: Algebraic Geometry.

Agradecimentos

Agradeço à Capes, ao IMPA e à UFJF, pelo apoio.