Partição em dois caminhos induzidos de cografos de Yutsis

Rodrigo dos Anjos Azevedo & Fábio Protti & Uéverton dos Santos Souza

Universidade Federal Fluminense

rodrigodosanjosazevedo@id.uff.br

impa Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Problemas combinatórios importantes como problemas de partição de vértices [Malaguti and Toth, 2010] e o de coloração de arestas [Holyer, 1981] podem ser modelados através de partição em grafos. Apresentaremos um teorema que visa determinar quais cografos de Yutsis podem ser particionados em dois caminhos induzidos.

Introdução

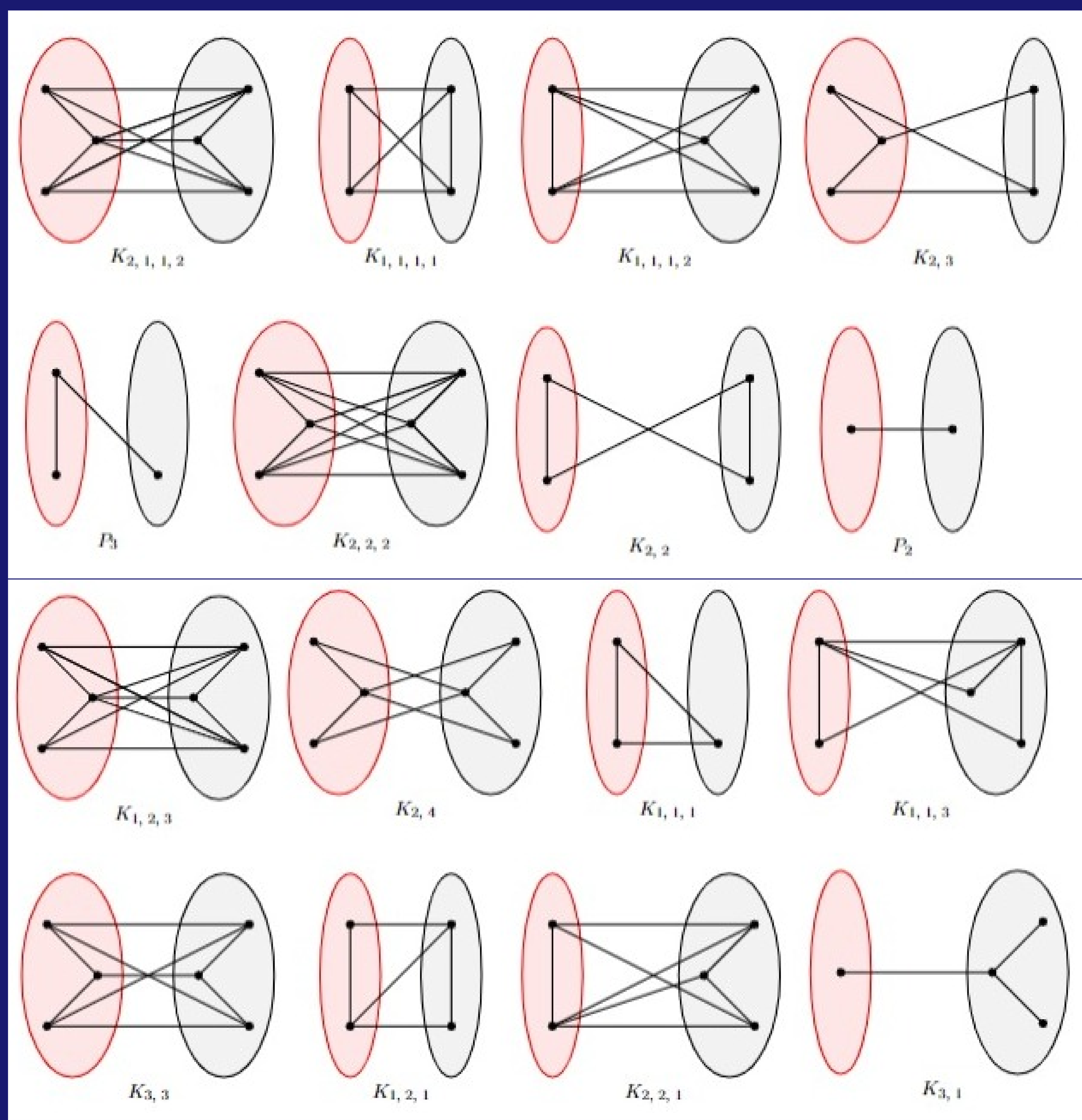
As definições básicas de grafos podem ser encontradas no livro [Bondy and Murty, 1976]. Apresentaremos apenas algumas nesse trabalho. Um grafo H é chamado de *subgrafo* de um grafo $G = (V, E)$ se o conjunto dos vértices de H for subconjunto dos vértices de G, e o conjunto de arestas de H for um subconjunto das arestas de G. Um subgrafo H de G será um *subgrafo induzido* de G por X, denotado por $H = G[X]$, se o conjunto de vértices de H for igual ao conjunto X, ou seja, $V(H) = X$, e o conjunto de arestas de H for tal que, se vw for uma aresta de G então v e w estão em X, ou seja, $E(H) = \{vw \in E(G) \mid v, w \in X\}$. Uma *árvore* é um grafo conexo e sem ciclos. Os caminhos constituem uma subclasse importante das árvores. Um caminho de extremidades v e w em um grafo G pode ser definido como uma sequência de vértices $v_0 v_1 \dots v_k$ tais que $v_0 = v$, $v_k = w$ e $v_i v_{i+1} \in E(G)$, $0 \leq i \leq k - 1$. Um grafo G é *conexo* se existe caminho entre qualquer par de vértices de G. Se G não é conexo, dizemos que G é *desconexo*. Um grafo é um *grafo caminho* de tamanho $n - 1$, denotado por P_n ($n \geq 2$), se G consiste de um único caminho com n vértices. Um grafo G é um *cografo* se todo subgrafo induzido de G, com pelo menos dois vértices, ou é desconexo ou é o complemento de um grafo desconexo, além disso são livres de P_4 [Panozzo, 2017]. Um cografo pode ser representado na forma de uma árvore, denominada *co-árvore*. Os *grafos de Yutsis* são os grafos que admitem uma partição em duas árvores. Admitiremos que toda árvore é um grafo de Yutsis.

Resultados

Teorema: Seja G um cografo conexo. Então, G pode ser particionado em dois caminhos induzidos se e somente se G é algum dos grafos da seguinte lista:

$$P_2\ ,\ P_3\ ,\ K_{2,2}\ ,\ K_{2,3}\ ,\ K_{2,4}\ ,\ K_{3,1}\ ,\ K_{3,3}\ ,\ K_{1,1,1}\ ,\ K_{1,2,1}\ ,$$
$$K_{2,2,1}\ ,\ K_{1,1,3}\ ,\ K_{1,2,3}\ ,\ K_{2,2,2}\ ,\ K_{1,1,1,1}\ ,\ K_{1,1,1,2}\ ,\ K_{2,1,1,2}\ .$$

Prova: Nenhum dos caminhos induzidos pode ter 4 vértices ou mais, caso contrário G não seria um cografo. Além disso, a raiz da co-árvore associada ao grafo não pode ter 5 filhos ou mais, caso contrário o grafo conteria K_5 (como G é cografo de Yutsis, G é livre de K_5). O restante da prova é uma análise de casos. Apresentamos nas figuras a seguir as partições dos grafos acima em dois caminhos induzidos.



Conclusão

Neste trabalho apresentamos um resultado que contempla os cografos de Yutsis que admitem uma partição de seus vértices em exatamente dois caminhos induzidos.

Referências

Enrico Malaguti and Paolo Toth. A survey on vertex coloring problems. *International Transactions in Operational Research*, 17(1):1–34, January 2010. doi: 10.1111/j.1475-3995.2009.00696.x. URL https://doi.org/10.1111/j.1475-3995.2009.00696.x.

Ian Holyer. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing*, 10(4):718–720, November 1981. doi: 10.1137/0210055. URL https://doi.org/10.1137/0210055.

J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. North Holland, 1976.

Rodrigo Triches Panozzo. Caracterizações clássicas e espectrais de cografos. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2017.