Espaços de Lorentz e o teorema de interpolação de Marcinkiewicz

Ricardo Machado da Motta

Universidade Federal de Santa Catarina

ricardo.machado.motta.r@posgrad.ufsc.br

Resumo

O presente trabalho apresenta uma teoria básica sobre os espaços de Lorentz. Inicialmente, são abordados alguns aspectos fundamentais da teoria do rearranjo de funções, tais como a função de distribuição e o rearranjo não crescente de uma função mensurável. Utilizando esses novos conceitos, os espaços de Lorentz são definidos e suas propriedades topológicas são apresentadas. Em seguida, são feitos comentários sobre operadores quase-lineares e enunciados os teoremas de interpolação de Marcinkiewicz. Através desses teoremas, são estabelecidas as desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev.

Introdução

Os espaços L^p desempenham um papel fundamental na análise harmônica clássica. Visto que muitos problemas nessa área de pesquisa consistem em provar a limitação de operadores, há um interesse natural em compreender o comportamento de um operador definido em L^p e de desenvolver uma teoria suficientemente poderosa para garantir estimativas de limitação.

Talvez um dos maiores avanços nessa direção foi realizado no trabalho [4]. Nesse pequeno artigo, Marcinkiewicz introduziu os espaços L^p_{weak} e, usando esses novos espaços, fez breves comentários sobre o teorema de interpolação que hoje leva seu nome. Alguns anos após a publicação de Marcinkiewicz, Lorentz usou a teoria do rearranjo de funções (veja [3]) para introduzir os espaços de Lorentz, os quais se mostraram variações naturais de L^p e L^p_{weak}.

Resultados

Para construirmos os espaços de Lorentz, precisamos de dois objetos fundamentais na teoria do rearranjo de funções:

Definição 1. *Se $f \in \mathcal{M}(X)$, definimos a sua **função distribuição** $d_f : [0,\infty) \to [0,\infty]$ e o seu **rearranjo não crescente** $f^* : [0,\infty) \to [0,\infty]$ por*

$$\begin{aligned} d_f(\alpha) &\overset{def}{=} \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > \alpha\}) \\ f^*(t) &\overset{def}{=} \inf\{s > 0 \mid d_f(s) \le t\}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Essencialmente, o rearranjo não crescente é construído para ter uma propriedade: ser equimensurável à função f, isto é, d_f e d_{f^*} coincidem. Usando o teorema de Fubini podemos mostrar que a norma L^p de f é determinada exclusivamente por d_f. Sendo o rearranjo não crescente contínuo pela direita, não negativo, não crescente e estando definido sobre os reais não negativos, faz sentido pensar a norma L^p de f em termos da norma L^p de f^*, já que essas boas propriedades de f^* podem facilitar estimativas envolvendo integrais.

Definição 2. *Considere $f \in \mathcal{M}(X)$, $0 < p < \infty$ e $0 < q \le \infty$. Para $0 < q < \infty$ seja*

$$\|f\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

e

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) \tag{2}$$

*O conjunto de todas as funções f mensuráveis tais que $\|f\|_{p,q} < \infty$ é denominado **espaço de Lorentz** de índices p e q, sendo representado por $L^{p,q}(X)$.*

Infelizmente a função definida na equação (2) não é, em geral, uma norma, já que a desigualdade triangular vale a menos de um fator constante maior ou igual a 1. Na realidade, ela é uma quase-norma, com a qual os espaços de Lorentz se tornam Quase-Banach. Com essa noção de convergência em $L^{p,q}(X)$ podemos mostrar em particular que o conjunto das funções simples $S(X)$ é denso quando $q < \infty$. Essa densidade nos permite, como é comum em análise, estender operadores limitados sobre $S(X)$ via um processo de limite.

Desde a década de 50 alguns matemáticos se empenharam em generalizar o resultado de interpolação descoberto por Marcinkiewicz para os espaços de Lorentz. Dentre muitas contribuições significativas, podemos citar [6] e mais recentemente [2]. No que se segue enunciamos duas dessas versões do teorema de interpolação de Marcinkiewicz, as quais assumem certas hipóteses mais fracas sobre regularidade e linearidade de um operador T para garantir estimativas de limitação:

Teorema 1 (Interpolação de Marcinkiewicz - versão $L^{p,r}(X)$)**.** *Considere $0 < p_0 \ne p_1 \le \infty$ e também $0 < q_0 \ne q_1 \le \infty$. Assuma que T é um operador quase-linear definido em $S(X)$ de tipo fraco restrito (p_0, q_0) e (p_1, q_1) com normas M_0 e M_1, respectivamente. Fixado $0 < \theta < 1$, defina*

$$\frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad e \qquad \frac{1}{q} = \frac{(1-\theta)}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \tag{3}$$

Então, dado $0 < r \le \infty$, existe uma constante positiva $C_* = C_*(p_0, p_1, q_0, q_1, K, r, \theta)$ tal que

$$\|T(f)\|_{q,r} \le C_* M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p,r} \tag{4}$$

para toda função $f \in S_0(X)$.

Teorema 2 (Interpolação de Marcinkiewicz - versão em $L^p(X)$)**.** *Considere $1 \le p_i \le q_i \le \infty$ para $i \in \{0,1\}$, com $q_0 \ne q_1$. Assuma que T é um operador quase-linear definido em $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ que satisfaz estimativas de tipo fraco (p_0, q_0) e (p_1, q_1) com constantes reais positivas M_0 e M_1, respectivamente. Fixado $0 < \theta < 1$, defina p e q como em (3). Então T é de tipo forte (p, q).*

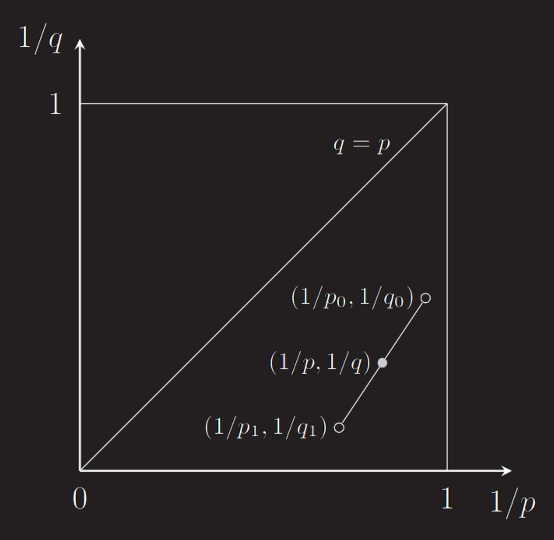

Figura 1 – Interpolação de Marcinkiewicz - caso $p_0 < p_1$.

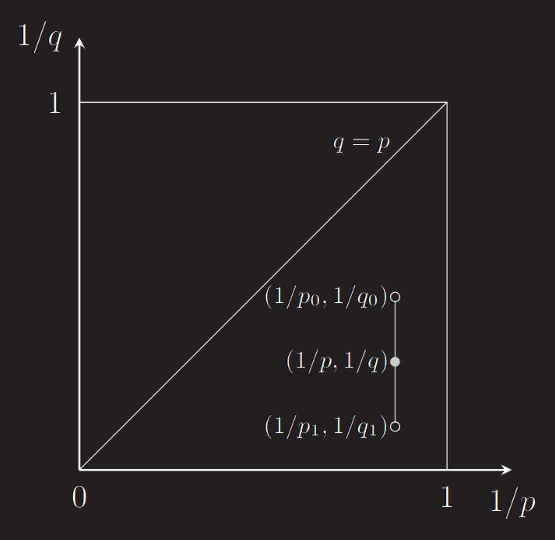

Figura 2 – Interpolação de Marcinkiewicz - caso $p_0 = p_1$.

Finalmente, podemos aplicar esse teorema para dar demonstrações mais simples para alguns fatos já conhecidos:

Teorema 3 (Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev)**.** *Considere $d \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, com $0 < \alpha < d$. Se $1 < p, r < \infty$ satisfazem a relação*

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{d-\alpha}{d}, \tag{5}$$

então existe uma constante $C(\alpha, d, p, r)$ tal que

$$\left\| f * |x|^{\alpha-d} \right\|_r \le C \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d). \tag{6}$$

Referências

[1] Colin Bennett e Robert Sharpley. **Interpolation of Operators**. Pure and Applied Mathematics 129. Orlando, Florida: Academic Press, 1988, p. 469.

[2] Yi Yu Liang, Li Guang Liu e Da Chun Yang. “An off-diagonal Marcinkiewicz interpolation theorem on Lorentz spaces”. Em: **Acta Mathematica Sinica, English Series** 27.8 (2011).

[3] George G. Lorentz. “Some New Functional Spaces”. Em: **Annals of Mathematics** 51.1 (1950), pp. 37–55.

[4] Jozéf Marcinkiewicz. “Sur l’interpolation d’operations”. Em: **C. R. Acad. Sci. Paris** 208 (1939), pp. 1272–1273.

[5] Marcel Riesz. “Sur les fonctions conjuguées”. Em: **Mathematische Zeitschrift** 27 (1928), pp. 218–244.

[6] E. M. Stein e Guido Weiss. “An Extension of a Theorem of Marcinkiewicz and Some of Its Applications”. Em: **Journal of Mathematics and Mechanics** 8.2 (1959), pp. 263–284.

[7] Antoni Szczepan Zygmund. **On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1989, pp. 214–239.