Equações Diferenciais Estocásticas e Relações de Flutuação-Dissipação

Rian G. Ricardo & Petrus H. dos Anjos

Universidade Federal de Catalão

rian.ricardo@discente.ufcat.edu.br

Introdução

As Equações Diferenciais Estocásticas [3, 5] modelam fenômenos físicos, como o Movimento Browniano (Figura 1) [2]. A Equação de Langevin [7] descreve a evolução de uma variável dinâmica ao longo do tempo, considerando forças determinísticas e estocásticas. Essa equação possui uma relação de flutuação-dissipação [6] que conecta a dissipação de energia em um sistema às flutuações aleatórias que ele experimenta. Essa relação ajuda a compreender a relação entre flutuações e dissipação em sistemas físicos, auxiliando entender como o sistema atinge o equilíbrio termodinâmico [1].

Dinâmica de Langevin

A eq. de Langevin [7] descreve uma partícula se movendo no fluido e é dada formalmente por

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma P + f(t) \tag{1}$$

onde P é o momento da partícula e γ é o coeficiente de atrito viscoso. A eq. 1 considera duas forças atuando na partícula: uma força de atrito viscoso, γP, onde a escala de tempo característica é γ^{-1} e uma força estocástica, $f(t)$ com escala de tempo $\Delta t \leq \gamma^{-1}$, que está relacionada com as colisões aleatórias entre a partícula e as moléculas do fluido (veja Figura 2).

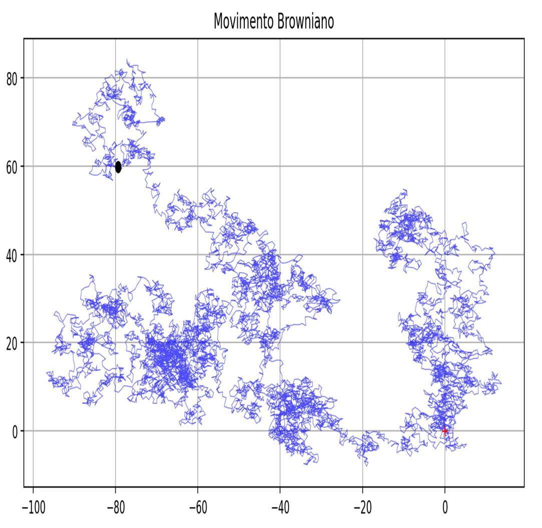

Figura 1: Exemplo de uma simulação da trajetória browniana para $\gamma = 10$ e $\sigma = 10$.

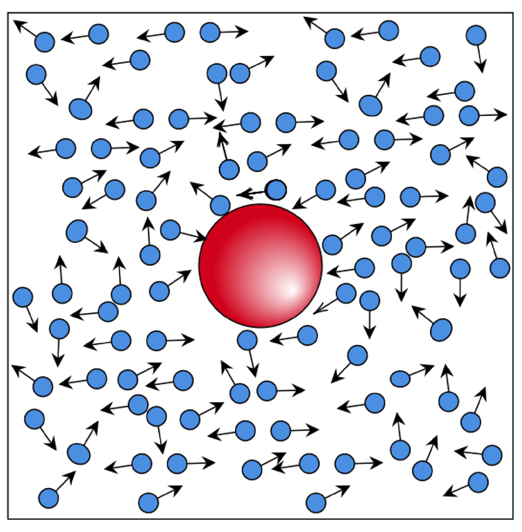

Figura 2: A partícula em vermelho está sujeita a forças aleatórias devido às colisões com as partículas em azul.

A força estocástica $f(t)$ é caracterizada por propriedade

$$\langle f(t)\rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t')\rangle = \sigma^2\delta(t-t') \tag{2}$$

onde σ^2 representa a intensidade das colisões e $\delta(\cdot)$ é a distribuição delta de Dirac. Para tempos suficientemente grandes, a partícula de Langevin entra em equilíbrio com sua vizinhança. Para que isso ocorra, as flutuações introduzidas pela força aleatória precisam ser dissipadas rapidamente pelo atrito viscoso.

Relações de Flutuação-Dissipação

As forças de fricção atuam como uma resistência ao movimento da partícula, dissipando sua energia cinética em forma de energia térmica (veja as Fuguras 3 e 4). No equilíbrio vale o teorema da equipartição de energia [2, 8, 9]

$$\langle P_{eq}^2\rangle = \lim_{t\to\infty}\langle P^2(t)\rangle = \frac{3}{2}kT$$

Formalmente, a solução da eq. 1 é dada por

$$P(t) = P_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t f(t')e^{-\gamma(t-t')}dt'$$

e portanto

$$\begin{aligned}\langle P^2(t)\rangle = &P_0^2 e^{-2\gamma t} + 2P_0 e^{-2\gamma t}\textstyle\int_0^t\langle f(t')\rangle dt' \\ &+ e^{-2\gamma t}\textstyle\int_0^t\int_0^t\langle f(t')f(t'')e^{\gamma(t+t')}dt'dt''.\end{aligned}$$

Da eq. 2 temos que

$$\langle P^2(t)\rangle = P_0^2 e^{-2\gamma t} + e^{-2\gamma t}\sigma^2\int_0^t e^{2\gamma t'}dt'dt''.$$

Integrando a equação acima e tomando o limite $t \to +\infty$, temos a relação de flutuação-dissipação

$$\sigma^2 = 2\gamma\langle P_{eq}^2\rangle = 3\gamma kT$$

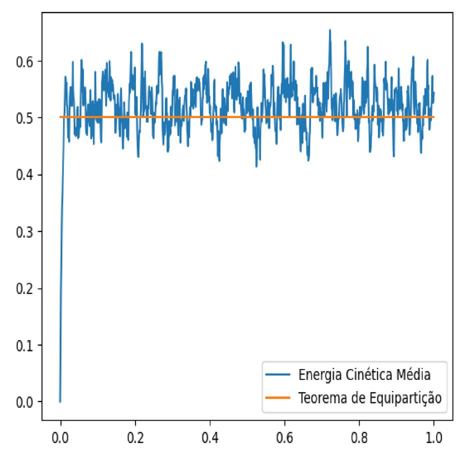

Figura 3: Simulação da energia cinética da partícula browniana em função do tempo, $\gamma = 10$ e $\sigma = 10$.

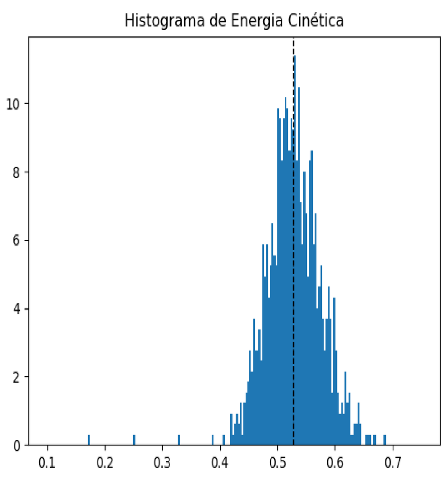

Figura 4: Simulação do Histograma de energia cinética, $\gamma = 10$ e $\sigma = 10$.

Conclusão

A relação de Flutuação-Dissipação estabelece que a amplitude das flutuações do movimento Browniano é diretamente proporcional à taxa de dissipação de energia. Relações de Flutuação-Dissipação estão presentes em diversos sistemas físicos modelados por Equações Diferenciais Estocásticas, e.g. na equação KPZ [4] que descreve o crescimento de uma superfície por deposição. Neste caso [1], a saturação da rugosidade da superfície (i.e. o "equilíbrio") é atingido graças a um balanço entre o ruído aleatório e a tensão superficial (que se opõe ao aumento da curvatura da superfície (i.e. "uma fricção").

Referências

[1] Petrus HR dos Anjos, Márcio S Gomes-Filho, Washington S Alves, David L Azevedo, and Fernando A Oliveira. The fractal geometry of growth: Fluctuation–dissipation theorem and hidden symmetry. *Frontiers in Physics*, 9:741590, 2021.

[2] Albert Einstein. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Courier Corporation, 1956.

[3] Iosif Ilyich Gikhman and Anatoli Vladimirovich Skorokhod. Stochastic differential equations. In *The theory of stochastic processes III*, pages 113–219. Springer, 2007.

[4] Mehran Kardar, Giorgio Parisi, and Yi-Cheng Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters*, 56(9):889, 1986.

[5] Entela Kostrista and Denajda Çibuku. Introduction to stochastic differential equations. *Journal of Natural Sciences and Mathematics of UT*, 3(5-6):189–195, 2018.

[6] Rep Kubo. The fluctuation-dissipation theorem. *Reports on progress in physics*, 29(1):255, 1966.

[7] Paul Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. *Compt. Rendus*, 146:530–533, 1908.

[8] Valentin A Levashov, Takeshi Egami, Rachel S Aga, and James R Morris. Equipartition theorem and the dynamics of liquids. *Physical review B*, 78(6):064205, 2008.

[9] JAS Lima and AR Plastino. On the classical energy equipartition theorem. *Brazilian Journal of Physics*, 30:176–180, 2000.