

Método de Aceleração para a Equação do Transporte de Partículas com Anisotropia Forte

Renato Klein & Julio Lombaldo

Departamento de Matemática Aplicada

renato.klein@ufrgs.br, julio.lombaldo@ufrgs.br



Resumo

Problemas de transporte de partículas com espalhamento de pico avançado, como no transporte de elétrons [3], podem ser resolvidos pelo método de ordenadas discretas. No entanto, a convergência da solução pode ser lenta usando métodos padrões, como iteração de fonte (SI) [1] ou aceleração sintética de difusão (DSA) [2]. Neste trabalho, exploramos a utilização da aproximação de Fokker-Planck como pré-condicionador para problemas de transporte de pico avançado. Reduções significativas no número de iterações e no tempo de execução foram encontradas em relação aos métodos supracitados.

Introdução

Partículas altamente carregadas têm livres caminhos médios curtos e seções de espalhamento de pico avançado. Isso significa que, nesses sistemas, as partículas percorrem um caminho muito curto antes de sofrerem uma colisão, e as colisões de espalhamento têm uma seção de espalhamento diferencial quase singular na direção frontal. Esses sistemas podem ser encontrados no transporte de elétrons, na física de plasma, na blindagem contra radiação, na astrofísica, entre outros.

Objetivo

Estudar o uso da aproximação de Fokker-Planck como um pré-condicionador no método de aceleração sintética para problemas de transporte de partículas com espalhamento de pico avançado.

A Equação do Transporte

Equação mono-energética, em estado estacionário para geometria de placa pela aproximação S_N

$$\mu_n \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu_n) + \sigma_t(x) \psi(x, \mu_n) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_{s,l}(x) P_l(\mu_n) \sum_{k=1}^N P_l(\mu_k) \psi(x, \mu_k) + Q(x, \mu_n), \quad (1)$$

$$\psi(0, \mu_n) = \psi_n^L \text{ para } \mu_n > 0 \text{ e } \psi(X, \mu_n) = \psi_n^R \text{ para } \mu_n < 0.$$

Aceleração Sintética

Escrevendo a eq. (1) na forma $\mathcal{L}\psi = S\psi + Q$ obtemos o método de aceleração sintética

$$\mathcal{L}\psi^{(\ell+\frac{1}{2})} = S\psi^{(\ell)} + Q, \quad (2)$$

$$\psi^{(\ell+1)} = \psi^{(\ell+\frac{1}{2})} + \mathcal{P}^{-1}S \left(\psi^{(\ell+\frac{1}{2})} - \psi^{(\ell)} \right), \quad (3)$$

com $\mathcal{P} \approx (\mathcal{L} - S)^{-1}$. Tomando \mathcal{P} como a aproximação da difusão

$$\mathcal{P} = \left(\frac{-1}{3(\sigma_t - \sigma_{s,1})} \frac{d^2}{dx^2} + \sigma_a \right) \sum_{k=1}^N (\cdot), \quad (4)$$

temos o método DSA. Propomos tomar \mathcal{P} como

$$\mathcal{P} = \left(\mu_n \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_a - \frac{\sigma_{tr}}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_n} \right). \quad (5)$$

Neste caso, chamamos de método de aceleração sintética por aproximação de Fokker-Planck (FPSA).

Resultados

Suponha uma placa homogênea com $M = 200$ células espaciais, largura da placa $X = 400\text{cm}$, $\sigma_t = \sigma_{s,0}$, $\sigma_a = 0$, $Q(x, \mu_n) = 1$, $L/N = 15/16$ e vácuo nos contornos.

- Utilizamos o método de elementos finitos descontínuos para a discretização espacial.
- Comparamos os métodos para três kernels de espalhamento: screened Rutherford (SRK), exponential kernel (EK) e Henyey-Greenstein (HGK) (Figura 1).

Kernel	Solver	Iterações	Runtime (s)
SRK $\eta = 10^{-5}$	DSA	53585	4066
	GMRES	2263	157
	FPSA	14	1
EK $\Delta = 10^{-7}$	DSA	70854	5248
	GMRES	2932	209.5
	FPSA	5	0.4
HGK $g = 0.9$	DSA	554	41
	GMRES	227	16
	FPSA	24	2

Tabela 1: N° de iterações e Runtime (erro relativo $< 10^{-10}$) [4]

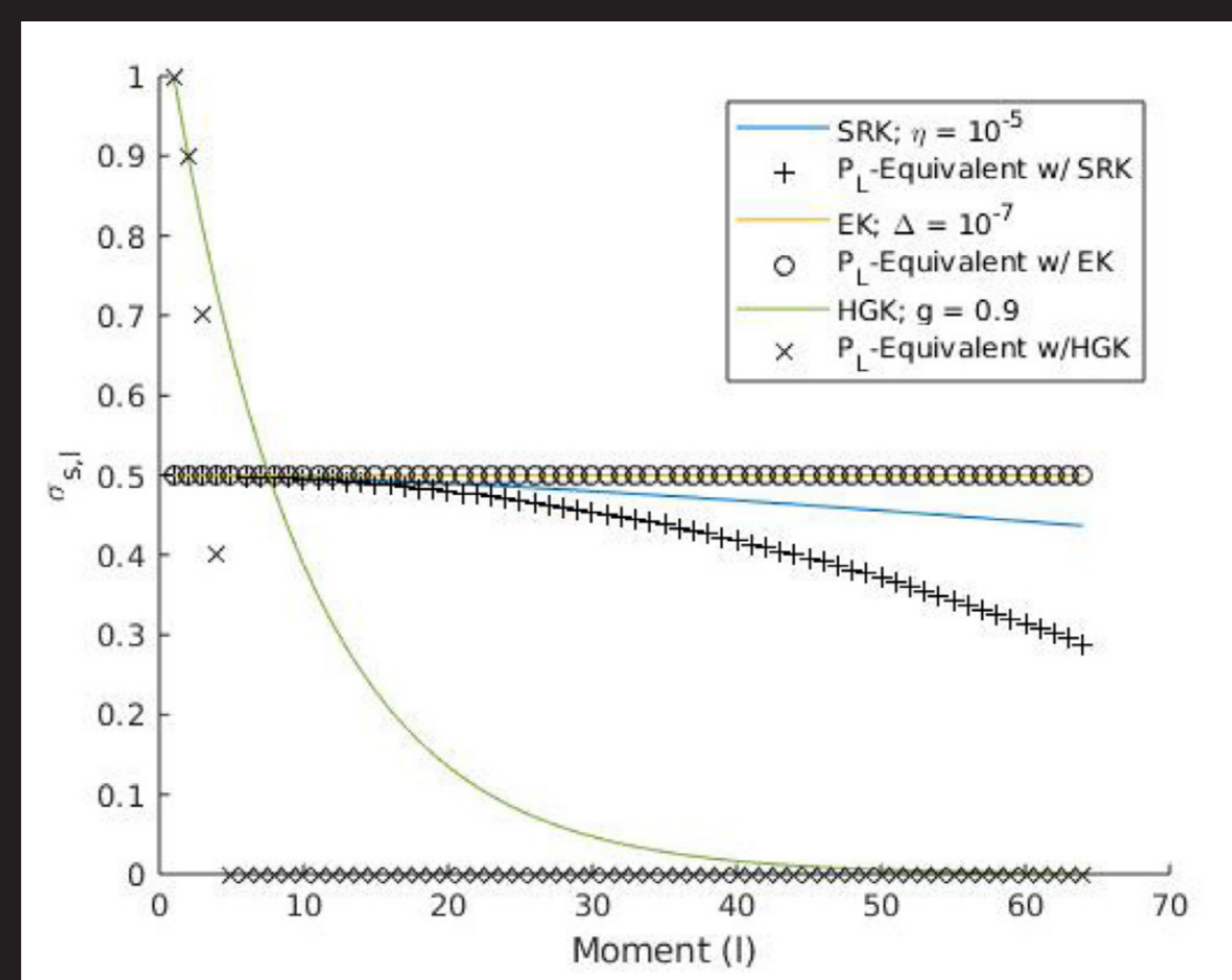


Figura 1: Kernels de espalhamento [4]

Conclusão

- Reduções de tempo e iterações de até quatro ordens de magnitude para os kernels SRK e EK;
- Redução de uma ordem de magnitude para o kernel HGK.

Referências

- [1] M. L. ADAMS, E. W. LARSEN, *Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations*, Progress in Nuclear Energy (2002).
- [2] R. E. ALCOUFFE, *Diffusion Synthetic Acceleration Methods for the Diamond-Differenced Discrete-Ordinates Equation*, Nuclear Science and Engineering (1977).
- [3] D. A. DIXON, A. K. PRINJA, B. C. FRANKE, *Computationally efficient moment-preserving Monte Carlo electron transport method with implementation in Geant4*, Nuclear Instr. and Methods in Phys. Res. Sec. B: Beam Interac. with Materials and Atoms (2015).
- [4] J. K. PATEL, J. S. WARSA, A. K. PRINJA, *Accelerating the solution of the SN equations with highly anisotropic scattering using the Fokker-Planck approximation*, Annals of Nuclear Energy (2016).

Agradecimentos

Agradeço a Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a CAPES e a organização do 34º Colóquio Brasileiro de Matemática pelo auxílio financeiro e por tornarem a apresentação deste trabalho possível.