Uma investigação de medidas de complexidade por meio do mapa logístico

Rebeca Rúbia H. Pinafo, Patrícia R. Cirilo, Karen de Lolo G. Paulino, Elbert E. N. Macau

Universidade Federal de São Paulo - Instituto de Ciência e Tecnologia

rebeca.pinafo@unifesp.br

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Neste trabalho, investigamos algumas medidas de complexidade propostas na literatura a fim de identificarmos suas propriedades e o que tais propriedades indicam no contexto da análise de séries temporais do mapa logístico. O mapa logístico é utilizado para tal como uma referência, uma vez que se trata de uma aplicação amplamente estudada com características bem conhecidas. Para esta análise, utilizaremos o diagrama de bifurcação e o expoente de Lyapunov do mapa logístico a fim de compararmos com os dados obtidos com o cálculo das medidas de complexidade utilizando o Python.

Introdução

A Teoria da Informação surgiu com Shannon, em meados do século XX, pelo seu interesse em entender e solucionar algumas questões na área de telecomunicação. Shannon propôs uma medida com o intuito de mensurar a precisão de mensagens recebidas, considerando informações que já fossem conhecidas ou não em relação à estas mensagens. A partir de então, tais medidas passaram a ser empregadas em contextos para além da área de telecomunição. Com base na medida de entropia apresentada por Shannon, foi definida uma medida de entropia denominada entropia de permutação, que considera padrões de ordem na disposição dos dados analisados e a frequência com que estes aparecem. Algumas vantagens de se trabalhar com tal entropia é a possibilidade do método se tornar mais simples, requerer menos hipóteses assumidas, entre outras [4].

O tamanho dos padrões de ordem (palavras) dependem da quantidade de símbolos com os quais trabalhamos, se o conjunto de símbolos (alfabeto) é formado por três símbolos, $\mathcal{A} = 3$, temos o total de $3! = 6$ padrões possíveis, a saber:

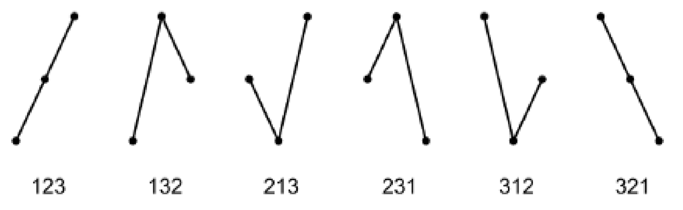

Figura 1: Padrões com três símbolos.

Usamos estes padrões para a análise das séries temporais do mapa logístico, cuja equação é dada por:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \tag{1}$$

para $3 \leq r \leq 4$, intervalo em que o mapa logístico apresenta dinâmica interessante como duplicação de período e alternância entre comportamento caótico e periódico. Assim, estabelecemos comparações entre os resultados obtidos para as medidas de complexidade, o diagrama de bifurcação e os valores do expoente de Lyapunov.

1 Medidas de Complexidade

Uma medida de complexidade é uma aplicação que indica o quão um sistema é ordenado ou não em função da informação que temos sobre este. Em nossa investigação, exploramos três medidas de complexidade para séries temporais do mapa logístico (1):

- Medida de Complexidade C_{LMC} [2]:

$$C_{LMC}(X) = H(X)D(X) \tag{2}$$

- Medida de Complexidade C_{LMC} modificada [2]:

$$C'_{LMC}(X) = H(X)D'(X) \tag{3}$$

- Medida de Complexidade C_Δ [3]:

$$C_\Delta = (1-\Delta)^{k_1}\Delta^{k_2} \tag{4}$$

em que $H(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log_2(p_i)$ é a entropia de permutação, $D = \sum_{i=1}^{N} (p_i - \frac{1}{N})^2$ o desequilíbrio, $D' = \sum_{i=1}^{N} p_i \log_2(\frac{p_i}{1/N})$ a informação relativa e $\Delta = \frac{H(X)}{H_{max}(X)}$ é denominado desordem, $(1 - \Delta)$ é denominado ordem e k_2, k_1 são os pesos da desordem e da ordem, respectivamente, escolhidos adequadamente de acordo com o contexto.

Resultados

Para uma comparação minuciosa entre as medidas de complexidade e o diagrama de bifurcação, os gráficos Medidas de Complexidade em função de r, em que $3 \leq r \leq 4$ é o parâmetro do mapa logístico, foram sobrepostos ao diagrama de bifurcação:

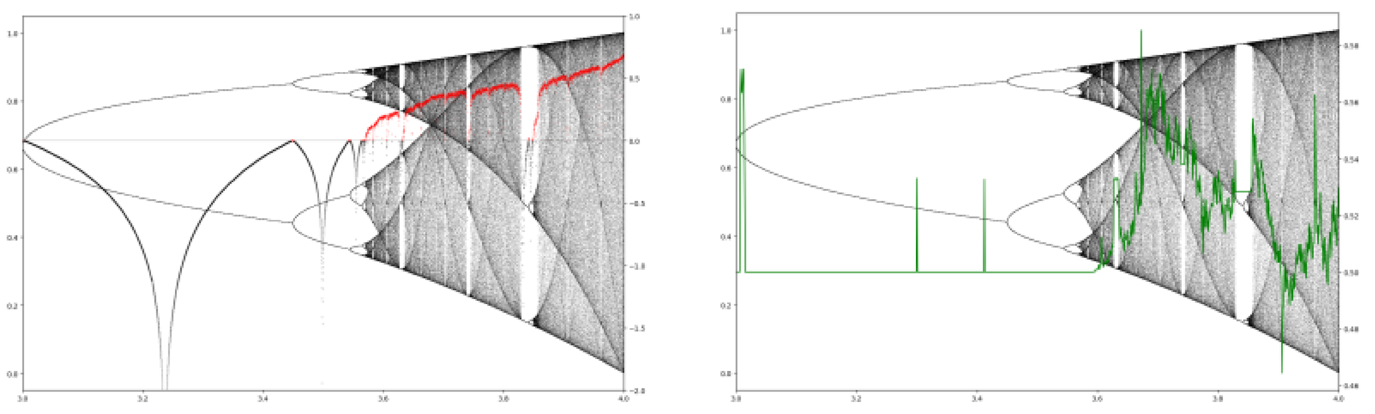

Figura 2: À direita, expoente de Lyapunov sobreposto ao digrama de bifurcação; à esquerda, C_{LMC} sobreposta ao digrama de bifurcação.

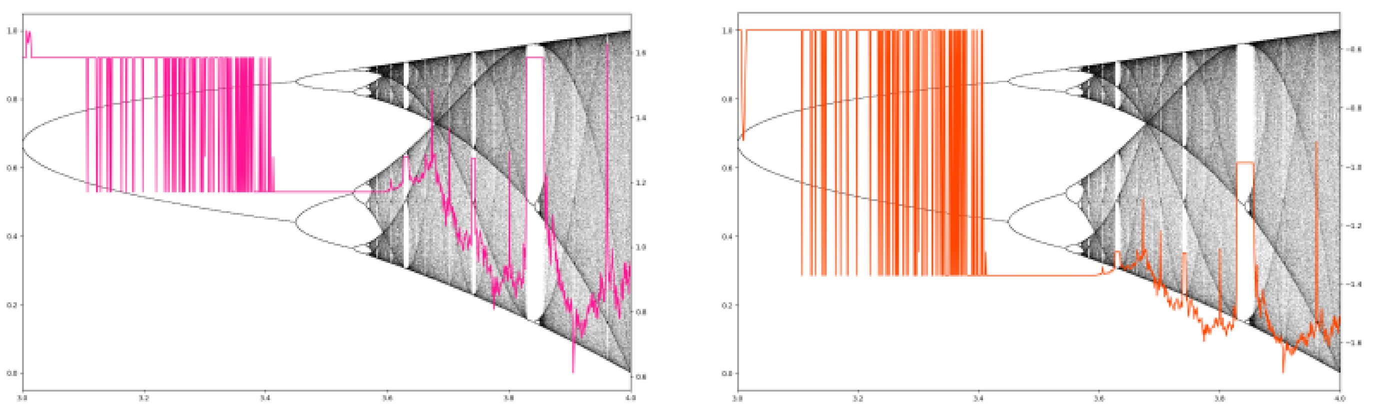

Figura 3: À direita, C'_{LMC} sobreposta ao diagrama de bifurcação; à esquerda, C_Δ sobreposta ao diagrama de bifurcação.

Conclusão

Observamos que as medidas de complexidade apresentam grande sensibilidade para indicar as janelas periódicas que se intercalam com os intervalos caóticos do mapa logístico e que, como esperado, as medidas permanecem constantes em toda janela periódica. Outra observação é o fato que para os valores de r imediatamente antes ou depois de janelas periódicas há um“burst”no gráfico das medidas, o que indica uma relação com o comportamento intermitente que o mapa apresenta para estes valores de transição de comportamento.

Referências

[1] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, Differential Equation, Dynamical Systems, and Introdution to Chaos. Elsevier Sciencie, 2013, ISBN: 9780123820105.

[2] P Feldman David e P Crutchfield James. “Measures of statistical complexity: Why?” Em: Physics Letters A 238.4 (1998), pp. 244–252. issn: 0375-9601. doi: https://doi.org/ 10 .1016 /S0375 - 9601(97)00855 - 4.

[3] José Roberto C Piqueira e Sérgio Henrique VL de Mattos. “Note on LMC complexity measure”. Em: Ecological Modelling 222.19 (2011), pp. 3603–3604.

[4] Christoph Bandt. “Small Order Patterns in Big Time Series: A Practical Guide”. Em: Entropy 21.6 (2019). issn: 1099-4300. doi: 10.3390/e21060613.

Agradecimentos

À CAPES e ao Comitê Organizador do 34º Colóquio Brasileiro de Matemática pelo apoio financeiro concedido.