Teorema da Esfera Diferenciável

Rafael da Silva Belli

Departamento de Matemática - UFSCar

rafaelbelli@estudante.ufscar.br

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

O Objetivo desse trabalho é a demonstração do seguinte:

Teorema (Brendle-Schoen)**.** *Uma variedade riemanniana de dimensão $n \geq 4$, compacta, completa e simplesmente conexa cuja curvatura seccional K satisfaz*

$$\frac{1}{4}K_{\max} < K \leq K_{\max},$$

é difeomorfa a uma esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Introdução

- Em 1925, Heinz Hopf demonstrou, em sua tese de doutorado, que qualquer variedade riemanniana tridimensional completa, simplesmente conexa de curvatura seccional constante é globalmente isométrica ao espaço euclidiano, esférico ou hiperbólico.
- Em 1951, Harry Rauch conseguiu demonstrar que se uma variedade riemanniana completa e simplesmente conexa possuísse curvatura seccional (normalizada) entre 0.76 e 1, então a mesma era homeomorfa a uma esfera.
- Em 1960, Wilhelm Klingenberg conseguiu um avanço considerável, demonstrando a mesma conjectura, mas com a curvatura seccional variando entre 0.55 e 1.
- Logo após isso, Klingenberg e Berger, demonstraram que o resultado vale para a curvatura seccional variando no intervalo (1/4,1]. Além disso, tal intervalo era ótimo.
- No início da década de 80 Hamilton introduziu o chamado fluxo de Ricci, que é representado pela EDP
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Ric_{ij}^{g(t)},$$
- Ele foi utilizado em 2007 por Brendle e Schoen na demonstração do Teorema da Esfera Diferenciável.
- O fluxo de Ricci também foi utilizado por Perel'man na demonstração da Conjectura de Poincaré.

Definições Preliminares

Definição 1. *Uma sequência $\{(M_k, g_k, O_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de variedades pontuadas* ***converge Cheeger-Gromov*** *para uma variedade pontuada $(M_\infty, g_\infty, O_\infty)$ se existir:*

1. *Uma exaustão $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de M_∞ com $O_\infty \in U_k$, $k \in \mathbb{N}$;*
2. *Uma sequência de difeomorfismos $\{\Phi_k : U_k \to V_k \subset M_k\}$ com $\Phi_k(O_\infty) = O_k$ tal que $\left(\Phi_k^* g_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge em C^∞ para g_∞ em conjuntos compactos em M_∞.*

Definição 2. *Definimos o* ***cone*** C_{PCSC} *por*

$$C_{PCSC} = \bigcap_{X,Y\in\mathbb{C}^n} \left\{R \in Curv : R\left(X, Y, \overline{X}, \overline{Y}\right) \geq 0\right\},$$

onde $Curv$ é o espaço dos (4,0)-tensores que verificam as mesmas simetrias do tensor de curvatura e a 1ª identidade de Bianchi.

Definição 3. *Dizemos que uma família contínua $C(s) \subset Curv$, $s \in [0,\infty)$, de cones convexos fechados e de mesma dimensão que $Curv$ é uma* ***família pinçada*** *se*

1. *$C(s)$ é um cone $O(n)$-invariante, para todo $s \geq 0$;*
2. *Cada $R \in C(s) - \{0\}$ possui curvatura escalar positiva;*
3. *$C(s)$ é preservado pelo tensor Q definido por*
$$Q_{ijkl} := B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk},$$
em que $B_{abcd} = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} g^{ij} g^{kl} R_{aibk} R_{cjdl}$;
4. *$C(s)$ converge para $\mathbb{R}^+ I$ quando $s \to \infty$, onde*
$$I(u,v,w,x) := g(u,w)g(v,x) - g(u,x)g(v,w).$$

Resultados Preliminares

Teorema 1. *Seja M^n uma variedade compacta com $n \geq 4$ com uma família de métricas $\{g(t)\}_{t\in[0,T)}$ evoluindo pelo fluxo de Ricci. Se $g(0)$ possui curvatura isotrópica positiva, então $g(t)$ possui curvatura isotrópica positiva, para todo t.*

Teorema 2. *Seja $\{C(s)\}_{s\in[0,\infty)} \subset Curv$ uma família pinçada de cones. Se $K \subset int(C(0))$ é compacto, então existe um conjunto $O(n)$-invariante, fechado e convexo $F \subset C(0)$ com as seguintes propriedades:*

1. *F é um conjunto preservado por Q;*
2. *$K \subset F$;*
3. *Existe $\rho(s)$ tal que $F + \rho(s) I \subset C(s)$, $s > 0$.*

Teorema 3. *Seja $(M, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci em um intervalo maximal $[0,T)$, $T < \infty$. Então existem sequências $O_i \in M$ e $t_i \to T$ tais que*

$$|R|(O_i, t_i) = \sup_{M\times[0,t_i]} |R|(x,t) \overset{i\to\infty}{\to} \infty.$$

Além disso, $g_i(t) = Q_i^{-1} g\left(t_i + Q_i^{-1} t\right)$, onde $Q_i = |R|(O_i, t_i)$, são soluções do fluxo de Ricci que convergem Cheeger-Gromov para a variedade completa $(M_\infty, g_\infty(t), O_\infty)$, $t \in (-\infty, b(n))$, verificando

$$|R|(g_\infty(0), O_\infty) = 1 \ e \ |R|(g_\infty(t), \cdot) \leq 1,$$

para todo $t \leq 0$.

Lema 1 (Schur)**.** *Seja M^n uma variedade riemanniana conexa com $n \geq 3$. Se $K_p(\Pi) = f(p)$, para todo 2-plano $\Pi \leq T_pM$, então f é constante.*

Demonstração do Teorema de Brendle e Schoen

- Seja $(M, g(t))$ a solução do fluxo de Ricci em um intervalo maximal $[0,T)$ tal que $g(0) = g_0$, $T < \infty$.
- Os tensores de curvatura em (M, g_0) moram em um conjunto compacto K no interior do cone C_{PCSC}.
- Pelo **Teorema 1**, existe uma família pinçada de cones $C(s)$, $0 \leq s < 1$ com $C(0) = C_{PCSC}$.
- Pelo **Teorema 2**, existe um conjunto convexo fechado e preservado F contendo o compacto K, e números $\rho(s)$ tais que $F + \rho(s) I \subset C(s)$, para todo $s > 0$.
- Pelo **Princípio do Máximo**, os tensores de curvatura em $g(t)$ moram em F, $t \in [0,T)$.
- Pelo **Teorema 3**, $(M_\infty, g_\infty, O_\infty)$ é limite da sequência de métricas $g_i(t) := Q_i g\left(t_i + Q_i^{-1} t\right)$ sobre pontos O_i.
- Logo as curvaturas de g_i são dadas por Q_i^{-1} vezes a curvatura de g, e portanto moram no conjunto $Q_i^{-1} F$.
- Em uma vizinhança de O_∞ as métricas $\Phi_i^* g_i$ têm curvatura escalar limitada longe do zero, logo R^{g_∞} moram em $\mathbb{R}^+ I$.
- Se $\{e_i, e_j\}$ é uma base ortonormal de um 2-plano qualquer em T_xM, então a curvatura seccional é dada por
$$K = R_x(e_i, e_j, e_i, e_j) = \alpha(x) I(e_i, e_j, e_i, e_j) = \alpha(x).$$

O **Lema de Schur** e a **Classificação de Variedades com Curvatura Seccional Constante** nos dão o que queremos.

Referências

[1] B. Andrews and C. Hopper. *The Ricci flow in Riemannian geometry: a complete proof of the differentiable 1/4-pinching sphere theorem.* springer, 2010.

[2] R. Hamilton. Three-manifolds with positive ricci curvature. *Journal of Differential geometry*, 17(2):255–306, 1982.