O Problema Da Palavra Para Grupos

Rafael Leite & Juliana Canella

Universidade Federal do Pará

rwb.leite@gmail.com / jscanella@ufpa.br

Resumo

O Problema da Palavra é um famoso problema de decisão em Teoria de Reescrita, que busca saber *se duas expressões são equivalentes* com respeito a um Sistema de Reescrita, que se traduz, em teoria dos grupos, a saber se *dadas duas palavras em um grupo finitamente gerado, há uma maneira algorítmica de determinar se essas duas palavras são equivalentes neste grupo*. De maneira análoga, o Problema da Palavra é decidível se podemos determinar que uma palavra é equivalente a identidade no grupo, após uma quantidade finita de passos. Este problema, apesar de fácil compreensão, é decidível apenas para classes específicas de grupos, como por exemplo: Grupos Policíclicos, Grupos de Coxeter, grupos cuja apresentação possui apenas um relator, Grupos de Tranças entre outros. De modo geral, é possível mostrar que esse problema é indecidível. Mostraremos alguns exemplos de grupos que tem o Problema da Palavra decidível e comentaremos algumas de suas propriedades.

Apresentação de Grupos

Uma maneira de caracterizar um grupo qualquer é pela sua *apresentação*.

Definição 1. *Um grupo F é dito* **livre** *sobre um conjunto não vazio $X \subset F$ se, dado qualquer grupo G e qualquer aplicação $\varphi : X \longrightarrow G$, existe um único homomorfismo $\varphi' : F \longrightarrow G$ tal que $\varphi'(x) = \varphi(x), \forall x \in X$.*

Teorema 1. *Todo grupo é imagem homomórfica de algum grupo livre.*

Definição 2. *Sejam G grupo e $X \subset G$ conjunto não vazio. Uma* **palavra** *em X é uma sequência finita de elementos, $w = x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$, com $x_i \in X$ e $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Ou ainda, w é a justaposição de elementos do conjunto $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$.*

Considere X um conjunto não vazio, F o grupo livre sobre X e R um subconjunto de F. Tome $N = \overline{R}$ o fecho normal de R em F. Então, para o grupo quociente $G = F/N$, temos a seguinte definição:

Definição 3. *$G = \langle X \mid R \rangle$ é uma* **apresentação livre**, *ou* **apresentação**, *do grupo G. Os elementos do conjunto X são* **geradores** *de G e os elementos de R são os* **relatores** *de G. Um grupo G é* **finitamente apresentado** *se possui uma apresentação com os conjuntos X e R finitos.*

Teorema 2. *[3] Todo grupo finito é finitamente apresentado.*

A vantagem de se trabalhar com grupos finitamente apresentados é que, quando somos capazes de obter um algoritmo para resolver o nestes grupos, por conta de sua apresentação, o algoritimo nos dá uma resposta em um número *finito de passos*.

Exemplos de grupos que possuem o Decidível

1. **Grupos Policíclicos**:

   Grupos policíclicos são aqueles que possuem uma apresentação policíclica, [3]:

   Definição 4. *Uma apresentação $\langle x_1, \cdots, x_n \mid R \rangle$ é chamada* **apresentação policíclica** *se existe uma sequência $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$, com $s_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e inteiros $a_{i,k}$, $b_{i,j,k}$ e $c_{i,j,k}$ tal que R é dado pelas seguintes relações:*

$$x_i^{s_i} = x_{i+1}^{a_{i,i+1}} \cdots x_n^{a_{i,n}}, 1 \le i \le n, s_i \le \infty$$
$$x_j^{-1} x_i x_j = x_{j+1}^{b_{i,j,j+1}} \cdots x_n^{b_{i,j,n}}, 1 \le j < i \le n$$
$$x_j x_i x_j^{-1} = x_{j+1}^{c_{i,j,j+1}} \cdots x_n^{c_{i,j,n}}, 1 \le j < i \le n$$

   Essas relações são chamadas de relações policíclicas.

   Exemplos: grupo Diedral, grupos abelianos finitamente gerados, grupos solúveis finitos, grupos nilpotentes finitamente gerados.

   Teorema 3. *[3] Um grupo policíclico com uma apresentação consistente possui o Problema da Palavra decidível.*

2. **Grupos de Coxeter**:

   Definição 5. *G é* **grupo de Coxeter** *se possui uma apresentação da forma $\langle \rho_1, \cdots, \rho_n \mid (\rho_i \rho_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle$, com $m_{ii} = 1$ e $m_{ij} \ge 2$, se $i \ne j$.*

   Exemplos: grupos de isometria, grupos de simetria de um poliedro regular e grupo simétrico S_n.

   Teorema 4. *[1] Considere o sistema de Coxeter (W, S) com S conjunto de geradores. O grupo de Coxeter apresentado por $W = \langle S \mid R \rangle$ possui o Problema da Palavra decidível.*

3. **Grupos Residualmente Finitos Finitamente Apresentados**:

   Definição 6. *Um grupo G é dito* **residualmente finito** *se, para todo $g \in G$, com $g \ne e$, existe $N \lhd G$ tal que $g \notin N$ e $|G/N| < \infty$. Equivalentemente, se, para cada $g \in G$, com $g \ne e$, existe um grupo finito H e um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $\varphi(g) \ne e$.*

   Exemplo: grupo de Rubik $\mathcal{R}$, cujos elementos são permutaçõese pela quantidade peças possíveis, isomorfo à algum subgrupo de S_{48}. Perceba que S_{48} é grupo de Coxeter mas $\mathcal{R}$ não é.

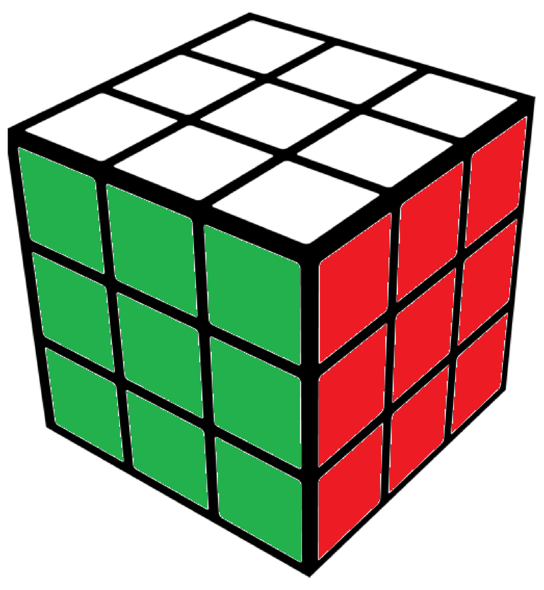

Figura 1: Cubo de Rubik $3 \times 3 \times 3$

   Teorema 5. *[5] Todo grupo residualmente finito finitamente apresentado possui o Problema da Palavra decidível.*

Considerações Finais

O Problema da Palavra por ser, em geral, indecidível nos diz que não existe um único algoritmo capaz de resolvê-lo. Assim, ter o Problema da Palavra decidível implica em ter um algoritmo que decide quando duas palavras são equivalentes em um grupo após uma quantidade finita de passos. Tais grupos são chamados *grupos computáveis* cuja vantagem está no fato de estudarmos computacionalmente suas propriedades. Uma ferramenta poderosa para tal é o software livre GAP - *Groups, Algorithms and Progamming* [2].

Referências

[1] Davis, Michael W. *The Geometry and Topology of Coxeter Groups.*(LMS-32). Princeton University Press, 2012.

[2] GAP, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.1*; 2022, https://www.gap-system.org.

[3] Holt, D.F., Eick, B. and O'Brien, E.A. *Handbook Of Computational Group Theory*. Chapman and Hall/CRC, 2005.

[4] Joyner, D. *Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine, and Other Mathematical Toys.* 2002.

[5] Robinson, Derek JS. *A Course in the Theory of Groups*. Vol. 80. Springer Science & Business Media, 2012.