A Conjectura de Kaplansky

Pedro Emerick
Universidade Federal de Juiz de Fora
pedro.emerick@hotmail.com

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Problemas de Preservadores Lineares (LPP's na sigla em inglês) remontam ao final do século XIX. Um dos problemas mais relevantes e desafiadores nesse campo é a conjectura de Kaplansky. A hipótese afirma que todo operador linear unitário sobrejetor que preserva invertibilidade entre duas álgebras semissimples é um homomorfismo de Jordan. Tal problema permanece sem resposta mesmo para as C*-álgebras e os resultados parciais até o momento são bastante particulares. Neste apresentação iremos explorar um resultado positivo parcial para álgebras de von Neumann e possíveis caminhos para investigação futura da conjectura.

Introdução

A conjectura de Kaplansky é baseada no questionamento de sob quais condições um operador linear que preserva invertibilidade entre espaços de Banach $\phi : A \to B$ é um homomorfismo de Jordan, isto é, $\phi(x^2) = \phi(x)^2$ para todo x em A. Após uma série de contra exemplos e resultados parciais positivos, a conjectura atingiu a forma citada no resumo.

A condição de um operador unitário $\phi : A \to B$ preservar invertibilidade é equivalente a $\mathrm{Sp}(\phi(x)) \subset \mathrm{Sp}(x)$ para todo $x \in A$, isto é, o espectro de $\phi(x)$ é um subconjunto do espectro de x. Para obter soluções parciais para a conjectura é comum exigir que ϕ preserve espectro, ou seja, que $\mathrm{Sp}(\phi(x)) = \mathrm{Sp}(x)$ para todo $x \in A$. Essa condição, junto com ϕ ser sobrejetora, implicam a continuidade.

Também é comum impor certas condições sobre A e B, como tomar álgebras particulares. Nesse trabalho, vamos supor que A e B são álgebras de von Neumann.

Resultados

Uma álgebra de von Neumann A (ou W*-álgebra) é uma subálgebra de $BL(H)$, onde H é um espaço de Hilbert e $BL(H)$ o espaço dos operador lineares limitados de H em H, tal que: A contém a unidade, A é uma álgebra estrela (isto é, fechada para a involução) e A é fechada na topologia fraca-estrela. Toda álgebra de von Neumann é semissimples. Uma propriedade bem conhecida é que se $h \in A$ é um elemento autoadjunto da W*-álgebra A, então h é o limite de uma combinação linear de idempotentes ortogonais. Para mais detalhes, ver [3]. Para demonstrar a conjectura de Kaplansky para A e B álgebras de von Neumann, usamos a seguinte caracterização espectral de idempotência de [1].

Teorema 1: Seja A uma álgebra de Banach semissimples. Então a é idempotente de A se, e somente se, $\mathrm{Sp}(a) \subset \{0, 1\}$ e existem $r, C > 0$ tais que $\mathrm{Sp}(x) \subset \mathrm{Sp}(a) + C||x - a||$ para $||x - a|| < r$.

Com esse resultado, é possível mostrar o seguinte teorema, também de [1].

Teorema 2: Sejam A e B duas álgebras de Banach semissimples e seja ϕ uma aplicação linear sobrejetora preservadora de espectro de A em B. Então ϕ transforma um conjunto de idempotentes ortogonais de A em um conjunto de idempotentes ortogonais de B.

O resultado acima é o ingrediente principal na verificação da conjectura de Kaplansky.

Teorema 3: Sejam A e B duas álgebras de von Neumann e seja ϕ uma aplicação linear sobrejetora preservadora de espectro de A em B. Então ϕ é um homomorfismo de Jordan.

Demonstração: Seja h autoadjunto em A. Então h é o limite de uma combinação linear de idempotentes ortogonais. Daí, pelo Teorema 2, $\phi(h)$ é o limite de uma sequência de combinações lineares de idempotentes ortogonais. Como ϕ é contínua, tomando o limite dessas sequências obtemos que $\phi(h^2) = \phi(h)^2$.

O termo geral de uma *-álgebra pode ser escrito como $x = h + ik$, com h, k autoadjuntos. Com uma manipulação algébrica e o que provamos acima concluímos que $\phi(x^2) = \phi(x)^2$ para todo $x \in A$.■

Para outros casos parciais são usados argumentos semelhantes, envolvendo idempotentes ou operadores de posto 1. Mas existem álgebras em que tais elementos não estão presentes ou se reduzem somente aos triviais. Por exemplo, para a B*-álgebra $C[0, 1]$ (funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{C}$), os únicos idempotentes são os triviais. Uma possível nova abordagem foi apresentada em [2] através do teorema:

Teorema 4: Sejam A e B álgebras de Banach unitárias com B semissimples e seja $\phi : A \to B$ uma aplicação linear sobrejetora unitária que preserva invertibilidade e localmente preserva comutatividade (isto é, $[\phi(x), \phi(x^2)] = 0$ para todo $x \in A$). Então ϕ é um homomorfismo de Jordan.

Pelo teorema, nas hipóteses da conjectura de Kaplansky, verificar a hipótese mais fraca de localmente preservar comutatividade é necessário e suficiente para verificar a validade da conjectura. Como pares que comutam são abundantes em qualquer álgebra, é possível que exista um caminho para generalização. Em [2] é feita uma demonstração para o Teorema de Marcus-Purves usando essa técnica. Até o momento, essa abordagem não foi utilizada para resolver casos em aberto.

Conclusão

A conjectura de Kaplansky ainda parece longe de uma solução geral. Os resultados parciais se baseiam em propriedades especiais de algumas álgebras, como a "abundância"dos idempotentes no caso das álgebras de von Neumann. Com frequência a solução passa por caracterizações espectrais para os elementos especiais considerados. As técnicas empregadas entretanto não são aplicáveis para classes maiores de álgebras, mesmo as C*-álgebras.

Em [2] temos um possível novo caminho para investigar a conjectura em ambientes mais gerais. Talvez a peça que esteja faltando seja uma caracterização espectral para comutatividade apropriada.

Referências

[1] B. Aupetit. Spectrum-Preserving Linear Mappings between Banach Algebras or Jordan–Banach Algebras. *Journal of the London Mathematical Society*, 62(3):917–924, 12 2000.

[2] M. Brešar and P. Šemrl. An extension of the gleason–kahane–Żelazko theorem: A possible approach to kaplansky's problem. *Expositiones Mathematicae - EXPO MATH*, 26:269–277, 08 2008.

[3] S. Sakai. *C*-Algebras and W*-Algebras*. Springer Berlin, Heidelberg, 1991.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.