Uma introdução a Homologia Simplicial

Pedro Henrique de Oliveira Neves

Universidade federal do Espírito Santo

pedro.o.neves@edu.ufes.br

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Apresentaremos um apanhado dos principais conceitos e resultados do nosso trabalho de iniciação científica, no qual estudamos os grupos de *homologia simplicial*, uma ferramenta para estudar espaços topológicos por meio de estruturas algébricas. Intuitivamente, esses grupos detectam "buracos" n-dimensionais.

Introdução

A homologia simplicial surge como uma forma de estudar invariantes topológicos em espaços trianguláveis, a partir de sequências de grupos abelianos que identificam propriedades geométricas desses espaços, e como veremos, resultados importantes podem ser derivados dessa teoria.

Objetivos

Introduzir alguns dos principais conceitos em homologia simplicial, assim como sua aplicação em resultados de topologia algébrica.

Definições

Um *simplexo* é uma generalização de um triângulo em dimensões arbitrárias.

Um *Complexo simplicial* K é uma coleção de simplexos e suas faces, cuja interseção entre dois simplexos quaisquer é uma face de ambos ou vazia.

Uma *n-cadeia* é uma soma formal

$$c_n := \sum g_i \sigma_i$$

Tal que σ_i é um n-simplexo de K e $g_i \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todas as n-cadeias de K munido da operação induzida por $\mathbb{Z}$ é o grupo abeliano livre $C_n(K)$.

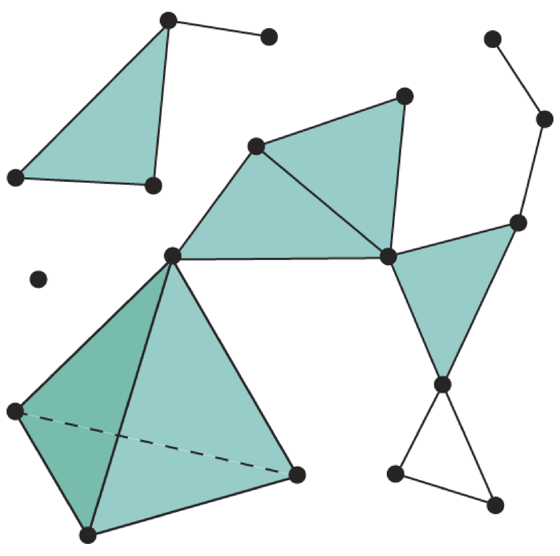
O operador bordo $\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ é definido linearmente por

$$\partial_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n]$$

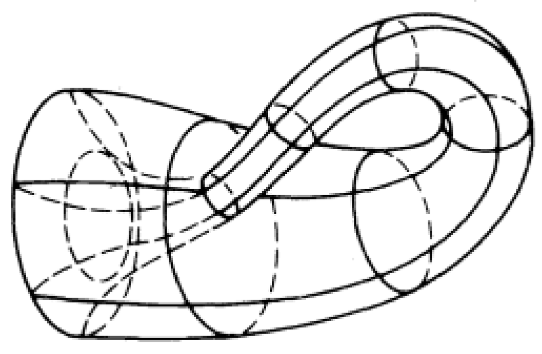
onde $\sigma = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$ é um n-simplexo de K e $\widehat{v_i}$ é a omissão do vértice v_i. Seguindo da definição temos que $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

A partir disso, definimos o n-ésimo grupo de homologia de K como

$$H_n(K) := \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$



(a) Complexo simplicial



(b) Garrafa de Klein

Resultados

0.1 Esfera unitária n-dimensional

$$H_p(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p = 0 \text{ ou } p = n, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

0.2 Garrafa de Klein

$$H_p(\mathrm{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{se } p = 1, \\ 0 & \text{se } p \geq 2. \end{cases}$$

0.3 Toro

$$H_n(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \text{ ou } 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Teorema (de Euler-Poincaré): Seja K um complexo simplicial, então

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i(K)$$

Onde $\chi(K)$ é a *característica de Euler* de K.

Aplicando o resultado para $K = S^2$, obtemos:

Corolário (Fórmula de Euler): Se S é um poliedro com V vértices, A arestas e F faces, então

$$V - E + F = 2$$

Podemos então concluir:

Corolário (Classificação dos sólidos platônicos): O Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro são os únicos sólidos platônicos.

Uma aplicação contínua $f : |K| \to |L|$ entre complexos simpliciais induz homomorfismos $f_* : H_n(K) \to H_n(L)\ \forall n \geq 0$

Teorema (de invariância dimensional): $\mathbb{R}^n$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^m$, se $m \neq n$.

Demonstração: Supondo, por absurdo, que $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, existiria um homeomorfismo h entre $\mathbb{R}^n - 0$ e $\mathbb{R}^m - h(0)$ e portanto uma equivalência homotópica entre S^{m-1} e S^{n-1}, e da invariância homotópica de H_p teríamos $0 \cong H_{n-1}(S^{m-1}) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. □

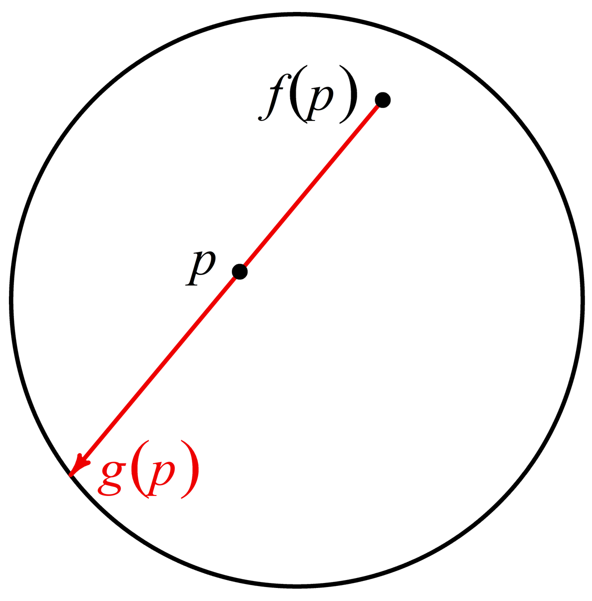
Teorema: Não existe retração de B^{n+1} em S^n.

Demonstração: Se existisse uma retração r, ela seria uma extensão da identidade em S^n, sendo ι a inclusão de S^n em B^{n+1}, teríamos

$$\begin{array}{ccccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{\iota_*} & H_n(B^{n+1}) & \xrightarrow{r_*} & H_n(S^n) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} \end{array}$$

E $r_*\iota_*$ seria um isomorfismo. Absurdo.

Teorema (do ponto fixo de Brouwer): Seja $f : B^n \to B^n$ uma aplicação contínua. Então existe $x \in B^n$ tal que $f(x) = x$.



Demonstração: Supondo que f não tenha nenhum ponto fixo, para todo $p \in B^n$, tomamos a semireta saindo de $f(p)$ e atravessando p. Definimos uma aplicação g tal que $g(p)$ é a interseção da semireta com S^{n-1}. Desse modo, g é uma extensão da identidade em S^{n-1}, absurdo. □

Conclusão

Temos que com os grupos de homologia podemos derivar resultados interessantes da topologia algébrica.

Referências

[1] Fred H. Croom. *Basic concepts of algebraic topology*. Springer, 1987.

[2] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Perseus Publ, 1997.

Agradecimentos

Agradeço a minha orientadora, Carolina de Miranda e Pereiro, pelo valioso apoio durante esse projeto.