Simples Passeio Aleatório

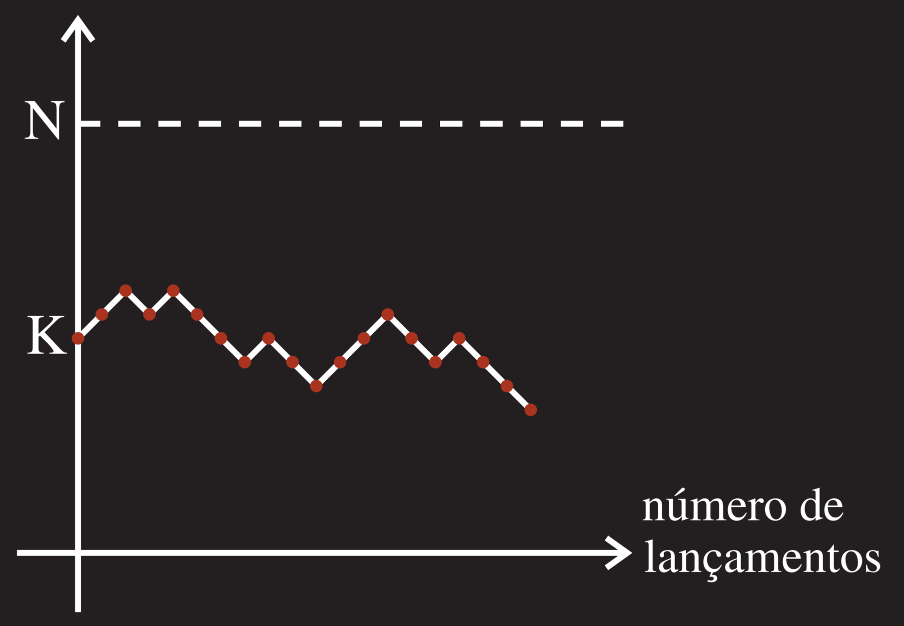
Oseias Olegario
Universidade de São Paulo
oseiasolegario@usp.br

Resumo

O passeio aleatório é um dos tópicos mais profundamente analisados na teoria da probabilidade. Isso ocorre principalmente graças à sua simplicidade e facilidade de compreensão, tornando-se uma ferramenta acessível, além de possuir grande aplicabilidade em descrever o movimento de partículas em aplicações práticas. De maneira essencial, um passeio aleatório é um processo estocástico que descreve o movimento de uma partícula. A partícula efetua uma série de passos aleatórios, geralmente em direções discretas, como cima, baixo, esquerda ou direita, selecionando a direção de forma probabilística a cada passo. Para o caso particular em que o passeio aleatório é simples, considera-se que há um deslocamento de uma unidade de comprimento a cada passo. Nesse trabalho, estudamos várias questões clássicas na teoria de passeios aleatórios simples, tanto para modelos de passeios aleatórios com barreiras refletoras quanto com barreiras absorventes. Exploraremos como é possível calcular as chamadas hitting probabilities, como calcular tempo médio de duração de passeios, entre outros fenômenos. Tais resultados clássicos também serão explorados numericamente.

Apresentação do Problema Inicial

Um homem deseja comprar um Jaguar que custa N unidades de dinheiro. Ele possui k unidades de dinheiro, onde $0 < k < N$, e para conseguir o valor restante, ele faz um acordo com o seu gerente bancário. O homem lançará uma moeda repetidamente, se a face superior da moeda for cara, ele receberá uma unidade de dinheiro do gerente. Se a face superior for coroa, ele dará uma unidade de dinheiro para seu gerente. Ele jogará até um dos dois eventos ocorrerem: ele perde todo seu dinheiro ou ele ganha dinheiro suficiente para comprar o Jaguar.



Pode-se, então, calcular a probabilidade do homem perder todo o seu dinheiro?

Resolução

Seja p a probabilidade de obtermos cara no lançamento da moeda, e $q = 1 - p$ a probabilidade de obtermos coroa. Temos que:

$$P_k = P_{k+1} \cdot p + P_{k-1} \cdot q \tag{1}$$

Onde P_k é a probabilidade do homem falir, relativa ao ponto k. vamos supor que a solução para P_k é da forma θ^k. Assim, podemos reescrever a equação 1 como:

$$\theta^k = p \cdot \theta^{k+1} + q \cdot \theta^{k-1} \tag{2}$$

Ou melhor,

$$p \cdot \theta^2 - \theta + q = 0 \tag{3}$$

Resolvendo a equação de segundo grau, encontramos as raízes $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = q/p$. Se $p = q = 0.5$, então a solução para a eq. 1 será da forma $P_k = A_1 + A_2 \cdot k$.
No entanto, se $p \neq q$, então $P_k = A_1 \cdot \theta_1^k + A_2 \cdot \theta_2^k = A_1 + A_2 \cdot (q/p)^k$ onde basta apenas utilizar as condições iniciais ($P_0 = 1$,$P_N = 0$) para chegar que:

$$P_k = \begin{cases} 1 - \dfrac{k}{N} & \text{se } p = \frac{1}{2} \\ \dfrac{(q\backslash p)^N - (q\backslash p)^k}{(q\backslash p)^N - 1} & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4}$$

Número médio de passos

Seja D_k o número de passos antes da partícula colidir com uma das barreiras, dado que começamos em k. Então,

$$D_k = p \cdot (1 + D_{k+1}) + q \cdot (1 + D_{k-1}) \tag{5}$$

que pode ser reescrito como:

$$D_k = p \cdot D_{k+1} + q \cdot D_{k-1} + 1 \tag{6}$$

Diferentemente do problema anterior, precisamos encontrar a solução homogênea e a particular. A solução homogênea coincide com a encontrada na Eq. 4. Para a Solução particular, temos que:

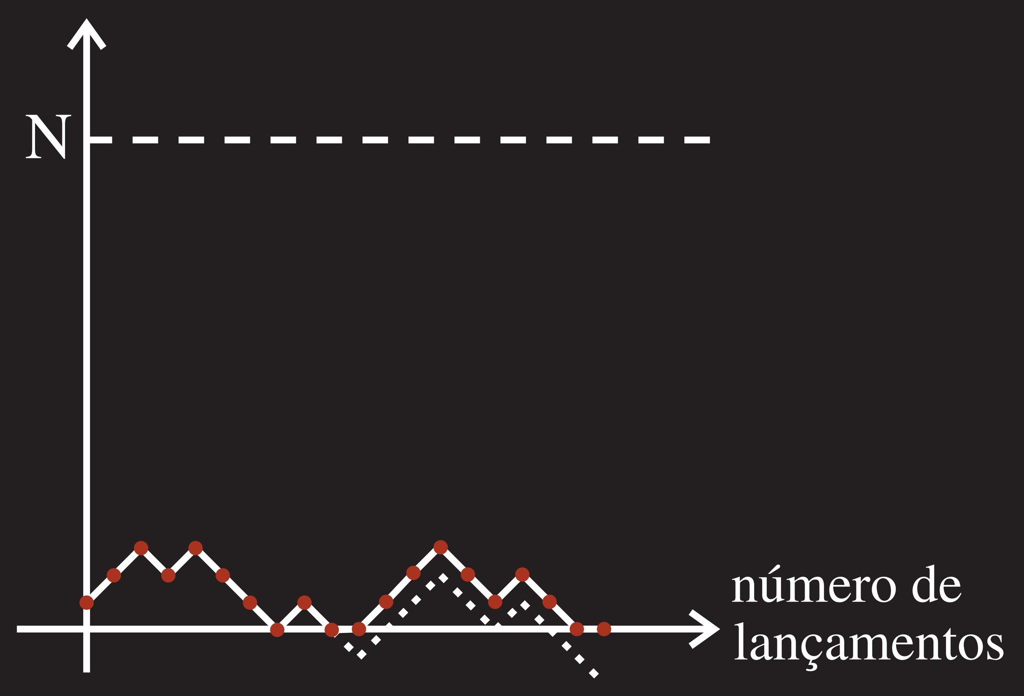
$$D_k^p = \begin{cases} A_1 + A_2 k - k^2 & \text{se } p = \frac{1}{2} \\ A_1 + A_2 \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^k + \dfrac{k}{q-p} & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{7}$$

Agora, somando a solução homogênea com a particular e aplicando as condições de contorno ($D_N = D_0 = 0$):

$$D_k = \begin{cases} k(N-k) & \text{se } p = \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{q-p}\left[k - N\left(\dfrac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N}\right)\right] & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{8}$$

Número médio de passos com barreira refletora

No problema inicial, suponha que o comprador do Jaguar tem um tio rico que irá lhe financiar. Caso o jogador perca todo o dinheiro, a sua continuidade no jogo fica assegurada, uma vez que se ele estiver com 0 unidades de dinheiro e obter coroa no lançamento ele se mantém no 0. Se ele obter cara o jogo segue normalmente.



Os passos para resolução do problema seguem os mesmos do problema anterior, com exceção das condições iniciais que serão alteradas para: $D_N = 0$, $D_0 =$1/p+D_1. Assim,

$$D_k = \begin{cases} (N-k)\left[(N+k)+1\right] & \text{se } p = \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{p-q}\left[\dfrac{q}{p-q}\left[(\frac{q}{p})^N - (\frac{q}{p})^k\right] + N - k\right] & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{9}$$

Conclusão

Percebe-se, então, que um problema que inicialmente pode parecer ser complexo, foi simplificado ao ser modelado como o movimento de uma partícula, fornecendo resultados interessantes com ferramentas matemáticas acessíveis. Ademais, vimos que sutis diferenças nos parâmetros modificou significativamente a interpretação do problema.

Referências

[1] Sven Erick Alm. Simple random walk. *Unpublished manuscript (2002)*, 2002.

[2] Geoffrey Grimmett and David Stirzaker. *Probability and Random Processes*. Oxford University Press, 2001.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo financiamento via o projeto número 117018/2022-8.