Uma introdução aos n-grupos de homologia singular

Odete Lara Melo Budtinger

Orientador: Edivaldo Lopes dos Santos

Universidade Federal de São Carlos / Departamento de Matemática

odete@estudante.ufscar.br

Introdução

Utilizaremos a Teoria de Homologia para associar um grupo abeliano a um espaço topológico e mostraremos que $\mathbb{R}^m$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ somente se $m = n$. Os resultados apresentados nesse trabalho podem ser vistos em [1] e [2]. Reservamos as notações X, Y e W para nos referir a espaços topológicos.

Simplexos Singulares

Definição 1. *Considere o conjunto*

$$\sigma_p = \Big\{(t_0, t_1, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} | \sum_{i=0}^{p} t_i = 1, t_i \geq 0\Big\}.$$

Tal conjunto é chamado de p-simplexo padrão.

Definição 2. *Seja σ_p um simplexo padrão. Um* p-simplexo singular *em X é uma aplicação $\varphi : \sigma_p \longrightarrow X$ contínua.*

Exemplo 1. *Os 0-simplexos singulares em X podem ser identificados como elementos de X.*

Exemplo 2. *Os 1-simplexos singulares em X podem ser identificados como caminhos em X.*

Definição 3. *Seja φ um p-simplexo singular. Definimos, para cada $0 \leq i \leq p$, a aplicação $\overline{\partial}_i(\varphi) : \sigma_{p-1} \longrightarrow X$, dada por*

$$\overline{\partial}_i(\varphi)(t_0, t_1, \ldots, t_{p-1}) = \varphi(t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{p-1}).$$

Essa aplicação é chamada de i-ésima face de φ.

A aplicação $\overline{\partial}_i$ definida acima é contínua.

Seja $f : X \longrightarrow Y$ aplicação contínua e φ um p-simplexo singular em X. Podemos definir um p-simplexo singular em Y considerando a aplicação $f_\#(\varphi) : \sigma_p \longrightarrow Y$, onde

$$f_\#(\varphi) = f \circ \varphi.$$

Ainda, se $g : Y \longrightarrow W$ é uma aplicação contínua e $id : X \longrightarrow X$ é a aplicação identidade, decorre da definição dada acima que $(g \circ f)_\#(\varphi) = (g \circ f)(\varphi)$ e $id_\#(\varphi) = \varphi$.

n- Grupos de Homologia Singular

Definição 4. *Seja A o conjunto de todos os n-simplexos singulares em X. Definimos $\mathcal{S}_n(X)$ como o grupo abeliano livre gerado por A.*

Cada $y \in \mathcal{S}_n(X)$ é dito uma n-cadeia singular de X e é visto como uma soma finita da forma $\sum n_\varphi \varphi$, com $n_\varphi \in \mathbb{Z}$.

Observação 1. *Para cada n-simplexo singular φ em X, $f_\#(\varphi)$ é um n-simplexo singular em Y. Podemos assim estender $f_\#$ a um homomorfismo de $\mathcal{S}_n(X)$ em $\mathcal{S}_n(Y)$, de modo que*

$$f_\#(\sum n_\varphi \varphi) = \sum n_\varphi f_\#(\varphi),$$

cada $n_\varphi \in \mathbb{Z}$ e tais somas sendo finitas.

Observação 2. *Para cada n-simplexo singular φ em X, $\overline{\partial}_i(\varphi)$ é um $(n-1)$-simplexo singular em X. Dessa forma, consideramos $(\overline{\partial}_i)_\#$ a aplicação que leva cada n-simplexo singular em um (n-1)-simplexo singular, dada por $\overline{\partial}_i(\varphi)$. Pela observação anterior, podemos estender essa aplicação a um homomorfismo de $\mathcal{S}_n(X)$ em $\mathcal{S}_{n-1}(X)$.*

Definição 5. *A aplicação*

$$\partial_n : \mathcal{S}_n(X) \longrightarrow \mathcal{S}_{n-1}(X)$$

dada por

$$\partial_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \overline{\partial}_i$$

é chamada de operador bordo.

Proposição 1. *Dado*

$$\mathcal{S}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{S}_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathcal{S}_{n-2}(X),$$

tem-se que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Definição 6. *Sejam $x, y \in \mathcal{S}_n(X)$. Se $\partial_n(x) = 0$, então x é dito um n-*ciclo*. Se existe $w \in \mathcal{S}_{n+1}(X)$ tal que $\partial_{n+1}(w) = y$, então y é dito um n-*bordo.

Denotamos o conjunto dos n-ciclos e n-bordos de $\mathcal{S}_n(X)$ por $\mathcal{Z}_n(X)$ e $\mathcal{B}_n(X)$, respectivamente.

Definição 7. *O quociente*

$$\mathbb{H}_n(X) = \mathcal{Z}_n(X)/\mathcal{B}_n(X)$$

*é chamado de n-*grupo de homologia singular *de X.*

Exemplo 3. *Seja $X = \{x\}$. Temos que*

$$\mathbb{H}_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{, se } n = 0; \\ \{0\} & \text{, se } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exemplo 4. *Seja X um espaço conexo por caminhos e não vazio. Temos que*

$$\mathbb{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}.$$

Invariantes Topológicos e Homotópicos

Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua, consideremos o homomorfismo f_* entre os n-grupos de homologia singular desses espaços, onde $f_*(z + \mathcal{B}_n(X)) = f_\#(z) + \mathcal{B}_n(Y)$.

Teorema 1. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um homeomorfismo. Então*

$$f_* : \mathbb{H}_n(X) \longrightarrow \mathbb{H}_n(Y)$$

é um isomorfismo.

Definição 8. *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ aplicações contínuas. Se $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$, então f e g são chamadas de* inversas homotópicas.

Definição 9. *Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é uma* equivalência homotópica *se f possui uma inversa homotópica. Dizemos que X e Y têm o mesmo* tipo de homotopia *e representamos $X \simeq Y$.*

Teorema 2. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma equivalência homotópica. Então*

$$f_* : \mathbb{H}_n(X) \longrightarrow \mathbb{H}_n(Y)$$

é um isomorfismo.

Exemplo 5. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ não vazio e convexo. Como $X \simeq \{x\}$ para algum $x \in X$,*

$$\mathbb{H}_n(X) \cong \{0\}$$

para $n > 0$.

Quando espaços euclidianos são homeomorfos?

Com resultados de sequências exatas e da construção da Sequência de Mayer-Vietoris, é possível calcular os n-grupos de homologia singular de $\mathbb{S}^m$.

Teorema 3. $\mathbb{H}_n(\mathbb{S}^m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{, se } n = 0 \text{ ou } n = m \\ \{0\} & \text{, caso contrário.} \end{cases}$

Lema 1. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

Teorema 4. *$\mathbb{R}^m$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ somente se $m = n$.*

Ideia da prova. Suponha que $\mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^n$. Dessa forma, pelo Lema 1,

$$\mathbb{S}^{m-1} \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(0)\} \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1},$$

para algum homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Utilizando os teoremas 1,2 e 3 e calculando o $(m-1)$-grupo de homologia singular das respectivas esferas, temos que $m = n$. □

Referências

[1] MUNKRES, J. **Elements of Algebraic Topology**. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[2] VICK, J. **Homology theory.** An introduction to Algebraic Topology, 2nd ed. Springer- Verlag, New York, 1994.

Agradecimentos

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio ao processo 2023/ 01101- 7.