Teorema Espectral para o Operador Laplaciano Grushin

Garcia, N. C. & Tavares, W. F. & Marrocos, M. A. M.

Universidade Federal do ABC

naisa.camila@ufabc.edu.br

impa

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

No presente trabalho, abordaremos o problema de autovalores do Laplaciano Grushin com condições de fronteira de Dirichlet e Neumann, explorando as ferramentas já desenvolvidas. Além disso, apresentaremos a forma do domínio que maximiza o autovalor principal do Laplaciano Grushin com condição de fronteira de Neumann em domínios limitados isovolumétricos de $\mathbb{R}^k \times N$.

Introdução

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade produto do tipo $\mathcal{M} := \mathbb{R}^k \times N$, onde (N, g_N) é uma variedade fechada, e consideramos em $\mathcal{M}$ a métrica produto. O operador Laplaciano Grushin age em funções $C^\infty(\mathcal{M})$ e é definido por

$$\Delta_G := \Delta_x^{\mathbb{R}^k} + \|x\|_{\mathbb{R}^k}^{2s} \Delta_y^N$$

onde $s \in \mathbb{R}$, $\Delta^{\mathbb{R}^k}$ e Δ^N denotam respectivamente o Laplaciano Beltrami em $\mathbb{R}^k$ e em N. Apesar de não ser uniformemente elíptico, o operador Grushin mantém alguns resultados clássicos da teoria de operadores elípticos. Esses resultados incluem a existência de soluções fracas e um análogo do Teorema de Rellich-Kondrachov.

Para um domínio (conjunto aberto e conexo) $\Omega \subset \mathcal{M}$ com fronteira C^2, consideramos os problemas de autovalores para o operador Laplaciano Grushin com condições de fronteira de Neumann e de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta_G\, u = \lambda u \ \ \textit{em}\ \Omega \\ \mathcal{B}_\alpha(u) \ = 0 \ \ \textit{sobre}\ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

$\mathcal{B}_\alpha(u) = \alpha\langle \mathcal{T}\nabla u, \nu\rangle + (1-\alpha)u$, para $\alpha \in \{0,1\}$, em outras palavras, quando $\alpha = 0$ estamos considerando a condição de fronteira de Dirichlet e quando $\alpha = 1$ estamos com condição de fronteira de Neumann, $u : \Omega \subset \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, ν é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ e $\mathcal{T}$ é o (1-1)-Tensor $\mathcal{T} : T_{(x,y)}(\mathbb{R}^k \times N) \to T_{(x,y)}(\mathbb{R}^k \times N)$; $\mathcal{T}(X_1 + X_2) = X_1 + \|x\|_{\mathbb{R}^k}^{2s} X_2$.

Notação: usaremos μ para denotar os autovalores associados ao Laplaciano clássico.

Preliminares

Seja Ω um domínio de $\mathcal{M}$. Denotamos por $W_G^{1,2}$ o espaço das funções reais em $L^2(\Omega)$ tais que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ para todo $i = 1, \cdots, k$ e $\|x\|^s \frac{\partial u}{\partial y_j} \in L^2(\Omega)$, munido da norma $\|u\|_{W_G^{1,2}(\Omega)} := \left(\int_\Omega u^2 + \int_\Omega \left|\sqrt{\mathcal{T}}\,\nabla u\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e, por $W_{G,0}^{1,2}(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W_G^{1,2}(\Omega)$.

Teorema Espectral para o Laplaciano Grushin

Definição 1. *Uma função u de classe C^1 é chamada solução fraca para o problema (1) quando satisfaz*

$$\int_\Omega \nabla v T \nabla u = \int_\Omega \lambda u v \ \forall\, v \in C^\infty(\Omega)$$

Teorema 1. *Seja $\Omega \subset \mathcal{M}$ um domínio (de classe C^∞). Então o problema de autovalor (1) possui um número infinito enumerável de autovalores $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots$ com $\lim_{n\to\infty} \lambda_m = \infty$ e autofunções $u_i \in W_{G,0}^{1,2}(\Omega)(W_G^{1,2}(\Omega))$ ortonormais em $L^2(\Omega)$ que satisfazem $B_\alpha(u) = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

Exemplo

Seja $\Omega_r := \{(x,y) \in M = \mathbb{R}^k \times N; \|x\|_{\mathbb{R}^k} \leq r, y \in N\}$ e considere o problema de autovalor do Laplaciano Grushin (1) em Ω_r.

Pelo método de separação de variáveis, fazendo $u(x,y) = f(x)g(y)$, podemos reescrever o problema (1) como sendo:

$$\begin{cases} -\Delta^N g(y) = \mu g(y) \ \ \textit{em}\ \ N \\ -\Delta^{\mathbb{R}^k} f(x) + \mu f(x)\|x\|^{2s} = \lambda f(x) \ \ \textit{em}\ B_r \\ \langle \nabla^{\mathbb{R}^k} f, \nu_x\rangle = 0 \ \text{em}\ \partial B_r = S_r^{k-1} \end{cases} \tag{2}$$

onde a segunda equação é conhecida como o problema de autovalor do operador de Schrodinger.

Proposição 1. *Seja $r > 0$. Se $\Omega \subset \mathcal{M}$ é um conjunto limitado que satisfaz $|\Omega| = |\Omega_r|$, então $\lambda_2(\Omega) \leq \mu^r = \frac{\mu_2(B_1^k)}{r^2} = \mu_2(B_r)$.*

Teorema 2. *Seja $v \geq v_c := \left(\frac{\mu_2(B^k)}{\mu_2(N)}\right)^{\frac{k}{2}} \omega_k|N|$ e $r = \left(\frac{v}{\omega_k|N|}\right)^{\frac{1}{k}}$, de modo que $|\Omega_r| = v$. Então temos $\lambda_2(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega_r)$ para todo conjunto aberto e limitado $\Omega \subset \mathcal{M}$ com $|\Omega| = v$.*

Demonstração. Seja $v \geq v_c$ fixo e $r = \left(\frac{v}{\omega_k|N|}\right)^{\frac{1}{k}}$, de modo que $|\Omega_r| = v$. Além disso, seja $\Omega \subset \mathcal{M}$ um subconjunto aberto limitado com $|\Omega| = v$. Pela Proposição (1), temos que $\lambda_2(\Omega) \leq \mu^r$. Isto posto, mostraremos que $\lambda_2(\Omega_r) = \mu^r$

Note que, novamente pela Proposição (1), temos que $\lambda_2(\Omega_r) \leq \mu^r$. Além disso, uma vez que $v \geq v_c$, temos:

$$r \geq \left(\frac{\mu_2(B_1^k)}{\mu_2(N)}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\mu_2(B_1^h)}{r^2} \leq \mu_2(N)$$
$$\Rightarrow \lambda_2(\Omega_r) \leq \mu^r = \frac{\mu_2(B_1^h)}{r^2} \leq \mu_2(N).$$

Agora, seja $u(x,y) = f(x)g(y) \in W_G^{1,2}$ uma autofunção de (1) com $\Omega = \Omega_r$ correspondente ao autovalor $\lambda_2(\Omega_r)$, pelo método de separações de variáveis obtivemos (2), portanto, temos que g é autofunção do Laplaciano na fibra associado ao autovalor $\mu_l(N)$, para algum $l \in \mathbb{N}$, e $f(x)$ é autofunção de Schrodinger associado ao autovalor $\lambda_2(\Omega_r)$, isto é,

$$-\Delta^{\mathbb{R}^k} f(x) + \mu_l(N) f(x)\|x\|^{2s} = \lambda_2(\Omega_r) f(x) \ \ \textit{em}\ B_r$$

Disso, obtemos

$$\mu_2(B_r) \leq \frac{\int_{B_r} \|\nabla f(x)\|^2}{\int_{B_r} f^2(x)}$$
$$= \lambda_2(\Omega_r) - \mu_l(N)\frac{\int_{B_r} \|x\|^{2s} f^2(x)}{\int_{B_r} f^2(x)} \leq \lambda_2(\Omega_r)$$

Donde segue o resultado.

■

Referências

[1] Fall, M. M., Weth, T.: *Critical domains for the first nonzero Neumann eigenvalue in Riemannian manifolds*. The Journal of Geometric Analysis, 29(4), 3221-3247.(2019).

[2] Jost, J.: *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York(2002).

[3] Lamberti,P.D., Luzzini, P., Musolino, P.: *Shape Perturbation of Grushin Eigenvalues*. The Journal of Geometric Analysis, 31, 10679-10717.(2021).

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradecemos ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pela oportunidade de divulgarmos este trabalho. Agradecemos ao comitê organizador do 34º Colóquio Brasileiro de Matemática, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a UFABC pela oportunidade de participar deste evento.