Monitoria 01 - Maxima

Jacqueline Rojas - UFPB

Sally Andria - UFF

Wállace Mangueira - UFPB

Julho 2023

Apresentando o Maxima

Maxima online

`http://maxima.cesga.es`

Apresentando o Maxima

Maxima online

http://maxima.cesga.es

Maxima on line

Clic Clear

Apresentando o Maxima - Orientações iniciais

Algumas orientações iniciais

- para encerrar linha de comando use `;`
- as operações aritméticas são indicadas por `+`, `-`, `*`, `/` e ^
- para nomear uma equação/resultado use `:`
- para executar o comando use a combinação de teclas `[Shift]` + `[Enter]` (instalado) ou o botão `Clic` (online)

Apresentando o Maxima - Alguns comandos

Alguns comandos

- `subst`($x = y$, expr): troca x por y em uma expressão expr que contenha x
- `coeff`(expressão, x, n): determina o coeficiente de x^n numa expressão polinomial com uma única variável x
- `diff`(expressão, variável): Derivada da função definida pela expressão com relação à variável dada
- `diff`(expressão,$var_1, n_1, var_2, n_2, \ldots, var_s, n_s$): Derivada parcial de ordem $n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ da função definida pela expressão dada com relação às variáveis $var_1, var_2, \ldots, var_s$.

Apresentando o Maxima - Alguns comandos

Alguns comandos

- `factor( )`: é um comando de fatoração
- `solve`(equação, variável) ou `solve`(equação): resolve uma equação polinomial
- `solve`([lista de equações], [lista de variáveis]): resolve um sistema de equações polinomiais
- `setify(s)`: Constrói um conjunto de elementos a partir da lista s
- `cardinality(S)`: calcula a cardinalidade do conjunto S
- Condicionais: o comando `if ... then ... else ...`

Exemplos básicos

Exemplos básicos

Exemplo 01

Usando o máxima, determine S o conjunto de pontos que pertencem a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$. Além disso, determine a cardinalidade de S.

Exemplos básicos

Exemplo 01

Usando o máxima, determine S o conjunto de pontos que pertencem a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$. Além disso, determine a cardinalidade de S.

Exemplo 02

Determine as singularidades da superfície projetiva $X = \mathcal{Z}(f)$ sendo $f = yzt + xzt + xyt + xyz$.

Exemplos básicos

Exemplo 01

Usando o máxima, determine S o conjunto de pontos que pertencem a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$. Além disso, determine a cardinalidade de S.

Exemplo 02

Determine as singularidades da superfície projetiva $X = \mathcal{Z}(f)$ sendo $f = yzt + xzt + xyt + xyz$.

Exemplo 03

Sejam $x = u, y = v, z = ua + vc$, $t = ub + vd$, sendo u, v variáveis e a, b, c, d constantes. Para quais valores de a, b, c, d o polinômio $g = f(u, v) \in \mathbb{C}[u, v]$ (f do Exemplo 02) é identicamente nulo?

Exemplo 01 - Solução

Exemplo 01

Usando o máxima, determine S o conjunto de pontos que pertencem a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$. Além disso, determine a cardinalidade de S.

Maxima on line

Exemplo 01 - Solução

Exemplo 01

Usando o máxima, determine S o conjunto de pontos que pertencem a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$. Além disso, determine a cardinalidade de S.

Maxima on line

```
s: solve([x^2-y=0,2*x-y=0],[x,y]);
```

Exemplo 01 - Solução

Exemplo 01

Usando o máxima, determine S o conjunto de pontos que pertencem a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$. Além disso, determine a cardinalidade de S.

Maxima on line

```
s: solve([x^2-y=0,2*x-y=0],[x,y]);
S: setify(s);
```

Exemplo 01 - Solução

Exemplo 01

Usando o máxima, determine S o conjunto de pontos que pertencem a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$. Além disso, determine a cardinalidade de S.

Maxima on line

```
s: solve([x^2-y=0,2*x-y=0],[x,y]);
S: setify(s);
ss: cardinality(S);
```

Clic Clear

Exemplo 01 - Solução

Maxima on line

```
s: solve([x^2-y=0,2*x-y=0],[x,y]);
S: setify(s);
ss: cardinality(S);
```

Clic Clear

(%i1) s: solve([x^2-y=0,2*x-y=0],[x,y]);
(%o1) [[x=2,y=4],[x=0,y=0]]
(%i2) S: setify(s);
(%o2) {[x=0,y=0],[x=2,y=4]}
(%i3) ss: cardinality(S);
(%o3) 2

Exemplo 02 - Solução

Exemplo 02

Determine as singularidades da superfície projetiva $X = \mathcal{Z}(f)$ sendo $f = yzt + xzt + xyt + xyz$.

Maxima on line

Exemplo 02 - Solução

Exemplo 02

Determine as singularidades da superfície projetiva $X = \mathcal{Z}(f)$ sendo $f = yzt + xzt + xyt + xyz$.

Maxima on line

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
```

Exemplo 02 - Solução

Exemplo 02

Determine as singularidades da superfície projetiva $X = \mathcal{Z}(f)$ sendo $f = yzt + xzt + xyt + xyz$.

Maxima on line

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
solve([diff(f,x)=0,diff(f,y)=0,diff(f,z)=0,
diff(f,t)=0],[x,y,z,t]);
```

Clic Clear

Exemplo 02 - Solução

Maxima on line

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
solve([diff(f,x)=0,diff(f,y)=0,diff(f,z)=0,
diff(f,t)=0],[x,y,z,t]);
```

Clic Clear

(%i1) f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;

(%o1) xyz+tyz+txz+txy

(%i2) solve([diff(f,x)=0,diff(f,y)=0,diff(f,z)=0, diff(f,t)=0],[x,y,z,t]);

(%o2) [[x=0,z=%r1,y=0,t=0], [x=%r2,z=0,y=0,t=0], [x=0,z=0,y=%r3,t=0],[x=0,z=0,y=0,t=%r4]]

Exemplo 03 - Solução

Exemplo 03

Sejam $x = u, y = v, z = ua + vc$, $t = ub + vd$, sendo u, v variáveis e a, b, c, d constantes. Para quais valores de a, b, c, d o polinômio $g = f(u, v) \in \mathbb{C}[u, v]$ (f do Exemplo 02) é identicamente nulo?

Maxima on line

Exemplo 03 - Solução

Exemplo 03

Sejam $x = u, y = v, z = ua + vc$, $t = ub + vd$, sendo u, v variáveis e a, b, c, d constantes. Para quais valores de a, b, c, d o polinômio $g = f(u, v) \in \mathbb{C}[u, v]$ (f do Exemplo 02) é identicamente nulo?

Maxima on line

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
```

Exemplo 03 - Solução

Exemplo 03

Sejam $x = u, y = v, z = ua + vc$, $t = ub + vd$, sendo u, v variáveis e a, b, c, d constantes. Para quais valores de a, b, c, d o polinômio $g = f(u, v) \in \mathbb{C}[u, v]$ (f do Exemplo 02) é identicamente nulo?

Maxima on line

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
g: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
```

Clic Clear

Exemplo 03 - Solução

Maxima on line

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
g: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
```

Clic Clear

(%i1) f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
(%o1) xyz+tyz+txz+txy
(%i2) g: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
(%o2) v(cv+au)(dv+bu)+u(cv+au)(dv+bu)+uv(dv+bu)
+uv(cv+au)

Exemplo 03 - Solução

De fato,

Exemplo 03 - Solução

De fato,

$$g = abu^3+(b+bc+a(1+b+d))u^2v+((1+a)d+c(1+b+d))uv^2+cdv^3$$

Exemplo 03 - Solução

De fato,

$$g = abu^3+(b+bc+a(1+b+d))u^2v+((1+a)d+c(1+b+d))uv^2+cdv^3$$

Queremos encontrar $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{cases} ab & = & 0 \\ b+bc+a(1+b+d) & = & 0 \\ (1+a)d+c(1+b+d) & = & 0 \\ cd & = & 0 \end{cases}$$

Exemplo 03 - Solução

Maxima on line

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
g: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
```

Exemplo 03 - Solução

Maxima on line

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
g: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
g1: diff(g,u,3)/(3!);
```

Exemplo 03 - Solução

Maxima on line

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
g: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
g1: diff(g,u,3)/(3!);
g2: diff(g,u,2,v,1)/(2!);
```

Exemplo 03 - Solução

Maxima on line

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
g: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
g1: diff(g,u,3)/(3!);
g2: diff(g,u,2,v,1)/(2!);
g3: diff(g,u,1,v,2)/(2!);
```

Exemplo 03 - Solução

Maxima on line

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
g: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
g1: diff(g,u,3)/(3!);
g2: diff(g,u,2,v,1)/(2!);
g3: diff(g,u,1,v,2)/(2!);
g4: diff(g,v,3)/(3!);
```

Exemplo 03 - Solução

Maxima on line

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
g: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
g1: diff(g,u,3)/(3!);
g2: diff(g,u,2,v,1)/(2!);
g3: diff(g,u,1,v,2)/(2!);
g4: diff(g,v,3)/(3!);
s: solve([g1=0,g2=0,g3=0,g4=0],[a,b,c,d]);
```

Clic Clear

Exemplo 03 - Solução

```
(%i3) g1: diff(g,u,3)/(3!);
(%o3) ab
(%i4) g2: diff(g,u,2,v,1)/(2!);
(%o4) ad+bc+ab+b+a
(%i5) g3: diff(g,u,1,v,2)/(2!);
(%o5) cd+ad+d+bc+c
(%i6) g4: diff(g,v,3)/(3!);
(%o6) cd
(%i7) s: solve([g1=0,g2=0,g3=0,g4=0],[a,b,c,d]);
(%o7) [[a=0,b=0,c=0,d=0],[a=0,b=-1,c=-1,d=0],
[a=-1,b=0,c=0,d=-1]]
```

Maxima - aplicação

Maxima - aplicação

Pergunta

Como calcular o número de retas numa superfície projetiva usando o Maxima?

Maxima - aplicação

Pergunta

Como calcular o número de retas numa superfície projetiva usando o Maxima?

Resposta

Repetimos as linhas de comando utilizado no Exemplo 03 com 6 (seis) substituições diferentes e contamos a quantidade de soluções em cada caso. A quantidade de soluções total é a resposta.

Maxima - aplicação

As substituições são

<u>Estrato 1</u>: $x = 0, y = 0, z = u, t = v$;

<u>Estrato 2</u>: $x = 0, y = u, z = ua, t = v$;

<u>Estrato 3</u>: $x = 0, y = u, z = v, t = ua + bv$;

<u>Estrato 4</u>: $x = u, y = ua, z = ub, t = v$;

<u>Estrato 5</u>: $x = u, y = ua, z = v, t = ub + vc$;

<u>Estrato 6</u>: $x = u, y = v, z = ua + vc, t = ub + vd$.

Contando retas na Cúbica de Fermat

Considere S a Cúbica de Fermat, ou seja, a superfície projetiva definida por

$$f(x, y, z, t) = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \in \mathbb{C}[x, y, z, t].$$

Qual é o número de retas contidas S?

Maxima on line

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f1: subst([x=0,y=0,z=u,t=v],f);
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f1: subst([x=0,y=0,z=u,t=v],f);
if f1=0 then E1:1 else E1:0;
```

Clic Clear

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f1: subst([x=0,y=0,z=u,t=v],f);
if f1=0 then E1:1 else E1:0;
```

Clic Clear

⋮

(%i3) if f1=0 then E1:1 else E1:0;
(%o3) 0

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
f21: diff(f2,u,3)/(3!);
f22: diff(f2,u,2,v,1)/(2!);
f23: diff(f2,u,1,v,2)/(2!);
f24: diff(f2,v,3)/(3!);
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
f21: diff(f2,u,3)/(3!);
f22: diff(f2,u,2,v,1)/(2!);
f23: diff(f2,u,1,v,2)/(2!);
f24: diff(f2,v,3)/(3!);
s2: solve([f21=0,f22=0,f23=0,f24=0],[a]);
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
f21: diff(f2,u,3)/(3!);
f22: diff(f2,u,2,v,1)/(2!);
f23: diff(f2,u,1,v,2)/(2!);
f24: diff(f2,v,3)/(3!);
s2: solve([f21=0,f22=0,f23=0,f24=0],[a]);
ss2: setify(s2);
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
f21: diff(f2,u,3)/(3!);
f22: diff(f2,u,2,v,1)/(2!);
f23: diff(f2,u,1,v,2)/(2!);
f24: diff(f2,v,3)/(3!);
s2: solve([f21=0,f22=0,f23=0,f24=0],[a]);
ss2: setify(s2);
E2: cardinality(ss2);
```

Clic Clear

Cúbica de Fermat - Estrato 2

Clic Clear

⋮

```
(%i09) s2: solve([f21=0,f22=0,f23=0,f24=0],[a]);
(%o09) [ ]
(%i10) ss2: setify(s2);
(%o10) { }
(%i11) E2: cardinality(ss2);
(%o11) 0
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f3: subst([x=0,y=u,z=v,t=u*a+b*v],f);
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f3: subst([x=0,y=u,z=v,t=u*a+b*v],f);
f31: diff(f3,u,3)/(3!);
f32: diff(f3,u,2,v,1)/(2!);
f33: diff(f3,u,1,v,2)/(2!);
f34: diff(f3,v,3)/(3!);
s3: solve([f31=0,f32=0,f33=0,f34=0],[a,b]);
ss3: setify(s3);
E3: cardinality(ss3);
```

Clic Clear

Cúbica de Fermat - Estrato 3

Clic Clear

⋮

```
(%i17) s3: solve([f31=0,f32=0,f33=0,f34=0],[a,b]);
(%o17) [ ]
(%i18) ss3: setify(s3);
(%o18) { }
(%i19) E3: cardinality(ss3);
(%o19) 0
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f4: subst([x=u,y=u*a,z=u*b,t=v],f);
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f4: subst([x=u,y=u*a,z=u*b,t=v],f);
f41: diff(f4,u,3)/(3!);
f42: diff(f4,u,2,v,1)/(2!);
f43: diff(f4,u,1,v,2)/(2!);
f44: diff(f4,v,3)/(3!);
s4: solve([f41=0,f42=0,f43=0,f44=0],[a,b]);
ss4: setify(s4);
E4: cardinality(ss4);
```

Clic Clear

Cúbica de Fermat - Estrato 4

Clic Clear

⋮

```
(%i25) s4: solve([f41=0,f42=0,f43=0,f44=0],[a,b]);
(%o25) [ ]
(%i26) ss4: setify(s4);
(%o26) { }
(%i27) E4: cardinality(ss4);
(%o27) 0
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f5: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f);
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f5: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f);
f51: diff(f5,u,3)/(3!);
f52: diff(f5,u,2,v,1)/(2!);
f53: diff(f5,u,1,v,2)/(2!);
f54: diff(f5,v,3)/(3!);
s5: solve([f51=0,f52=0,f53=0,f54=0],[a,b,c]);
ss5: setify(s5);
E5: cardinality(ss5);
```

Clic Clear

Clic Clear

$$\vdots$$

(%i33) s5: solve([f51=0,f52=0,f53=0,f54=0],[a,b,c]);

(%o33) $\left[\left[a=-1,b=0,c=-1,d=\%r3\right],\left[a=-1,\cdots\right],\cdots\right]$

(%i34) ss5: setify(s5);

(%o34) $\left\{\left[a=-1,b=0,c=-1,d=\%r3\right],\left[a=-1,\cdots\right],\cdots\right\}$

(%i35) E5: cardinality(ss5);

(%o35) 9

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f6: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
```

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
f6: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
f61: diff(f6,u,3)/(3!);
f62: diff(f6,u,2,v,1)/(2!);
f63: diff(f6,u,1,v,2)/(2!);
f64: diff(f6,v,3)/(3!);
s6: solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0],[a,b,c,d]);
ss6: setify(s6);
E6: cardinality(ss6);
```

Clic Clear

Cúbica de Fermat - Estrato 6

Clic Clear

$\vdots$

(%i41) s6: solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0],[a,b,c,d]);

(%o41) $\left[\left[a=-1,b=0,c=0,d=-1\right],\left[a=-1,\cdots\right],\cdots\right]$

(%i42) ss6: setify(s6);

(%o42) $\left\{\left[a=-1,b=0,c=0,d=-1\right],\left[a=-1,\cdots\right],\cdots\right\}$

(%i43) E6: cardinality(ss6);

(%o43) 18

Cúbica de Fermat - Total

Maxima on line

```
f: x^3+y^3+z^3+t^3;
t: E1+E2+E3+E4+E5+E6;
```

Clic Clear

⋮

(%i44) t: E1+E2+E3+E4+E5+E6;
(%o44) 27

Fim da Monitoria 01

Obrigado!