

Monitoria 02 - Maxima e suas limitações

Jacqueline Rojas - UFPB

Sally Andria - UFF

Wállace Mangueira - UFPB

Julho 2023

Verificando a singularidade de algumas quárticas

Quártica que não contém retas

A quártica definida pelo polinômio

$$f(x, y, z, t) = t^4 + xy^3 + yz^3 + zx^3 \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$$

é não singular.

Verificando a singularidade de algumas quárticas

Quártica que contém 16 retas

A quártica definida pelo polinômio

$$z^4 + y^4 + x^3y + t^4$$

é não singular.

Verificando a singularidade de algumas quárticas

Quártica que contém 32 retas

A quártica definida pelo polinômio

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 + z^4 + t^2z^2 + t^4$$

é não singular.

Verificando a singularidade de algumas quárticas

Quártica que contém 48 retas

A quártica definida pelo polinômio

$$x^3y - xy^3 + zt^3 - z^3t$$

é não singular.

Verificando a singularidade de algumas quárticas

Quártica que contém 64 retas

A quártica definida pelo polinômio

$$x^4 - xy^3 + zt^3 - z^4$$

é não singular.

Estrato 1

Maxima on line

```
f: x^4-x*yt^3+z*tt^3-zt^4;  
f1: subst([x=0,y=0,z=u,t=v],f);  
if f1=0 then E1:1 else E1:0;
```

Clic

Clear

⋮

```
(%i3) if f1=0 then E1:1 else E1:0;  
(%o3) 0
```

Estrato 2

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;  
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);  
f21: diff(f2,u,4)/(4!);  
f22: diff(diff(f2,u,3),v)/(3!);  
f23: diff(diff(f2,u,2),v,2)/(4);  
f24: diff(diff(f2,u),v,3)/(3!);  
f25: diff(f2,v,4)/(4!);  
s2: solve([f21=0,f22=0,f23=0,f24=0,f25=0],[a]);  
ss2: setify(s2);  
E2: cardinality(ss2);
```

Clic

Clear

Estrato 2

Clic

Clear

⋮

(%i10) s2: solve([f21=0,f22=0,f23=0,f24=0,f25=0],[a]);

(%o10) [[a=0]]

(%i11) ss2: setify(s2);

(%o11) {[a=0]}

(%i12) E2: cardinality(ss2);

(%o12) 1

Estrato 3

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;  
f3: subst([x=0,y=u,z=v,t=u*a+b*v],f);  
f31: diff(f3,u,4)/(4!);  
f32: diff(diff(f3,u,3),v)/(3!);  
f33: diff(diff(f3,u,2),v,2)/(4);  
f34: diff(diff(f3,u),v,3)/(3!);  
f35: diff(f3,v,4)/(4!);  
s3: solve([f31=0,f32=0,f33=0,f34=0,f35=0],[a,b]);  
ss3: setify(s3);  
E3: cardinality(ss3);
```

Clic

Clear

Estrato 3

Clic

Clear

⋮

(%i19) s3: solve([f31=0,f32=0,f33=0,f34=0,f35=0],[a,b]);

(%o19) $\left[[a = 0, b = 1], [a = 0, b = -(\sqrt{3}i + 1)/2], \dots \right]$

(%i20) ss3: setify(s3);

(%o20) $\left\{ [a = 0, b = 1], [a = 0, b = -(\sqrt{3}i + 1)/2], \dots \right\}$

(%i21) E3: cardinality(ss3);

(%o21) 3

Estrato 4

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;  
f4: subst([x=u,y=u*a,z=u*b,t=v],f);  
f41: diff(f4,u,4)/(4!);  
f42: diff(diff(f4,u,3),v)/(3!);  
f43: diff(diff(f4,u,2),v,2)/(4);  
f44: diff(diff(f4,u),v,3)/(3!);  
f45: diff(f4,v,4)/(4!);  
s4: solve([f41=0,f42=0,f43=0,f44=0,f45=0],[a,b]);  
ss4: setify(s4);  
E4: cardinality(ss4);
```

Clic

Clear

Estrato 4

Clic

Clear

⋮

(%i28) s4: solve([f41=0,f42=0,f43=0,f44=0,f45=0],[a,b]);

(%o28) $\left[[b = 0, a = 1], [b = 0, a = -(\sqrt{3}i + 1)/2], \dots \right]$

(%i29) ss4: setify(s4);

(%o29) $\left\{ [b = 0, a = 1], [b = 0, a = -(\sqrt{3}i + 1)/2], \dots \right\}$

(%i30) E4: cardinality(ss4);

(%o30) 3

Estrato 5

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;  
f5: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f);  
f51: diff(f5,u,4)/(4!);  
f52: diff(diff(f5,u,3),v)/(3!);  
f53: diff(diff(f5,u,2),v,2)/(4);  
f54: diff(diff(f5,u),v,3)/(3!);  
f55: diff(f5,v,4)/(4!);  
s5: solve([f51=0,f52=0,f53=0,f54=0,f55=0],[a,b,c]);  
ss5: setify(s5);  
E5: cardinality(ss5);
```

Clic

Clear

Estrato 5

Clic

Clear

⋮

(%i37) s5: solve([f51=0,f52=0,f53=0,f54=0,f55=0],[a,b,c]);

(%o37) $\left[[a = 1, b = 0, c = 1], \dots \right]$

(%i38) ss5: setify(s5);

(%o38) $\left\{ [a = 1, b = 0, c = 1], \dots \right\}$

(%i39) E5: cardinality(ss5);

(%o39) 9

Estrato 6

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;  
f6: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f);  
f61: diff(f6,u,4)/(4!);  
f62: diff(diff(f6,u,3),v)/(3!);  
f63: diff(diff(f6,u,2),v,2)/(4);  
f64: diff(diff(f6,u),v,3)/(3!);  
f65: diff(f6,v,4)/(4!);  
s6: solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0,f65=0],[a,b,c,d]);  
ss6: setify(s6);  
E6: cardinality(ss6);
```

Clic

Clear

Estrato 6

Clic

Clear

Programming error detected. Check your input.

Estrato 6

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;  
f6: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f);  
f61: diff(f6,u,4)/(4!);  
f62: diff(diff(f6,u,3),v)/(3!);  
f63: diff(diff(f6,u,2),v,2)/(4);  
f64: diff(diff(f6,u),v,3)/(3!);  
f65: diff(f6,v,4)/(4!);
```

Clic

Clear

Estrato 6

Clic

Clear

⋮

(%i41) f61: diff(f6,u,4)/(4!);

(%o41) $ab^3 - a^4 + 1$

(%i42) f62: diff(diff(f6,u,3),v)/(3!);

(%o42) $3ab^2d + b^3c - 4a^3c$

(%i43) f63: diff(diff(f6,u,2),v,2)/(4)

(%o43) $3(abd^2 + b^2cd - 2a^2c^2)$

(%i44) f64: diff(diff(f6,u),v,3)/(3!);

(%o44) $ad^3 + 3bcd^2 - 4ac^3 - 1$

(%i45) f65: diff(f6,v,4)/(4!);

(%o45) $c(d^3 - c^3)$

Estrato 6

Clic

Clear

⋮

(%i41) f61: diff(f6,u,4)/(4!);

(%o41) $ab^3 - a^4 + 1$

(%i42) f62: diff(diff(f6,u,3),v)/(3!);

(%o42) $3ab^2d + b^3c - 4a^3c$

(%i43) f63: diff(diff(f6,u,2),v,2)/(4)

(%o43) $3(abd^2 + b^2cd - 2a^2c^2)$

(%i44) f64: diff(diff(f6,u),v,3)/(3!);

(%o44) $ad^3 + 3bcd^2 - 4ac^3 - 1$

(%i45) f65: diff(f6,v,4)/(4!);

(%o45) $c(d^3 - c^3)$

E agora?

Notemos que

$$c(d^3 - c^3) = c(d - c)(d - \xi c)(d - \xi^2 c),$$

onde ξ é uma raiz cúbica primitiva da unidade.

Truque

Repetimos o raciocínio usado no Estrato 6 quatro vezes, trocando f_{65} por

$$c, d - c, d - \xi c \text{ e } d - \xi^2 c,$$

onde ξ é uma raiz cúbica primitiva da unidade.

Estrato 6 - Parte I

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;  
f6: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f);  
f61: diff(f6,u,4)/(4!);  
f62: diff(diff(f6,u,3),v)/(3!);  
f63: diff(diff(f6,u,2),v,2)/(4);  
f64: diff(diff(f6,u),v,3)/(3!);  
f65: c;  
s6: solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0,f65=0],[a,b,c,d]);  
ss6: setify(s6);  
E6: cardinality(ss6);
```

Clic

Clear

Estrato 6 - Parte I

Clic

Clear

⋮

(%i46) s6: solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0,f65=0],[a,b,c,d]);

(%o46) $\left[[a = 1, b = 0, c = 0, d = 1], \dots \right]$

(%i47) ss6: setify(s6);

(%o47) $\left\{ [a = 1, b = 0, c = 0, d = 1], \dots \right\}$

(%i48) E6: cardinality(ss6);

(%o48) 12

Estrato 6 - Parte II

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;  
f6: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f);  
f61: diff(f6,u,4)/(4!);  
f62: diff(diff(f6,u,3),v)/(3!);  
f63: diff(diff(f6,u,2),v,2)/(4);  
f64: diff(diff(f6,u),v,3)/(3!);  
h: solve([d^3-c^3],[d]); f65: h[1];  
s6: solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0,f65],[a,b,c,d]);  
ss6: setify(s6);  
E6: cardinality(ss6);
```

Clic

Clear

Estrato 6 - Parte II

Clic

Clear

⋮

(%i45) h: solve([d^3-c^3],[d]);

(%o45) $\left[d = \frac{(\sqrt{3}i-1)c}{2}, d = -\frac{(\sqrt{3}i+1)c}{2}, d = c \right]$

(%i46) f65: h[1];

(%o46) $d = \frac{(\sqrt{3}i-1)c}{2}$

(%i47) s6: solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0,f65],[a,b,c,d]);

(%o47) $\left[\left[a = \frac{1}{\sqrt{3}}, b = -\frac{3i-\sqrt{3}}{3}, c = -\frac{1}{\sqrt{3}}, d = -\frac{3i-\sqrt{3}}{6} \right], \dots \right]$

(%i48) ss6: setify(s6);

(%o48) $\left\{ \left[a = \frac{1}{\sqrt{3}}, b = -\frac{3i-\sqrt{3}}{3}, c = -\frac{1}{\sqrt{3}}, d = -\frac{3i-\sqrt{3}}{6} \right], \dots \right\}$

(%i49) E6: cardinality(ss6);

(%o49) 12

Estrato 6 - Parte III

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;  
f6: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f);  
f61: diff(f6,u,4)/(4!);  
f62: diff(diff(f6,u,3),v)/(3!);  
f63: diff(diff(f6,u,2),v,2)/(4);  
f64: diff(diff(f6,u),v,3)/(3!);  
h: solve([d^3-c^3],[d]); f65:h[2];  
s6: solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0,f65],[a,b,c,d]);  
ss6: setify(s6);  
E6: cardinality(ss6);
```

Clic

Clear

Estrato 6 - Parte III

Clic

Clear

⋮

(%i45) h: solve([d^3-c^3],[d]);

(%o45) $\left[d = \frac{(\sqrt{3}i-1)c}{2}, d = -\frac{(\sqrt{3}i+1)c}{2}, d = c \right]$

(%i46) f65: h[2];

(%o46) $d = -\frac{(\sqrt{3}i+1)c}{2}$

(%i47) s6: solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0,f65],[a,b,c,d]);

(%o47) $\left[\left[a = \frac{1}{\sqrt{3}}, b = \frac{3i+\sqrt{3}}{3}, c = -\frac{1}{\sqrt{3}}, d = \frac{3i+\sqrt{3}}{6} \right], \dots \right]$

(%i48) ss6: setify(s6);

(%o48) $\left\{ \left[a = \frac{1}{\sqrt{3}}, b = \frac{3i+\sqrt{3}}{3}, c = -\frac{1}{\sqrt{3}}, d = \frac{3i+\sqrt{3}}{6} \right], \dots \right\}$

(%i49) E6: cardinality(ss6);

(%o49) 12

Estrato 6 - Parte IV

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;  
f6: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f);  
f61: diff(f6,u,4)/(4!);  
f62: diff(diff(f6,u,3),v)/(3!);  
f63: diff(diff(f6,u,2),v,2)/(4);  
f64: diff(diff(f6,u),v,3)/(3!);  
h: solve([d^3-c^3],[d]); f65:h[3];  
s6: solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0,f65],[a,b,c,d]);  
ss6: setify(s6);  
E6: cardinality(ss6);
```

Clic

Clear

Estrato 6 - Parte IV

Clic

Clear

⋮

(%i45) h: solve([d^3-c^3],[d]);

(%o45) $\left[d = \frac{(\sqrt{3}i-1)c}{2}, d = -\frac{(\sqrt{3}i+1)c}{2}, d = c \right]$

(%i46) f65: h[3];

(%o46) $d = c$

(%i47) s6: solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0,f65],[a,b,c,d]);

(%o47) $\left[\left[a = \frac{1}{\sqrt{3}}, b = -\frac{2}{\sqrt{3}}, c = -\frac{1}{\sqrt{3}}, d = -\frac{1}{\sqrt{3}} \right], \dots \right]$

(%i48) ss6: setify(s6);

(%o48) $\left\{ \left[a = \frac{1}{\sqrt{3}}, b = -\frac{2}{\sqrt{3}}, c = -\frac{1}{\sqrt{3}}, d = -\frac{1}{\sqrt{3}} \right], \dots \right\}$

(%i49) E6: cardinality(ss6);

(%o49) 12

Total

Portanto, existem exatamente

$$0 + 1 + 3 + 3 + 9 + 12 + 12 + 12 + 12 = 64$$

retas contidas na quártica de Schur.

Obrigado!