Sobre os limites de viscosidade e resistividade nulas para as equações magneto-micropolares não homogêneas

Mirelle Sousa & Felipe Wergete

Universidade Federal de Pernambuco

mirelle.moura@ufpe.br

Resumo

Provaremos que quando as viscosidades e resistividade tendem a zero, a solução do sistema de equações que modelam o movimento de um fluido magneto-micropolar incompressível e não homogêneo, converge para a solução do sistema magneto-micropolar ideal, isto é, onde essas constantes são nulas.

Introdução

As equações que modelam o movimento de um fluido magneto-micropolar são uma generalização das clássicas equações de Navier-Stokes onde a micro-rotação e o efeito do campo magnético induzido no movimento do fluido são consideradas, a saber

$$\begin{cases} \rho \mathrm{u}_t + \rho(\mathrm{u}\cdot\nabla)\mathrm{u} + \nabla p \\ = (\mu+\chi)\Delta \mathrm{u} + \chi\nabla\times \mathrm{w} + (\mathrm{b}\cdot\nabla)\mathrm{b} + \rho \mathrm{f} \\ \rho \mathrm{w}_t + \rho(\mathrm{u}\cdot\nabla)\mathrm{w} \\ = \gamma\Delta \mathrm{w} + \kappa\nabla(\nabla\cdot \mathrm{w}) + \chi\nabla\times \mathrm{u} - 2\chi \mathrm{w} + \rho \mathrm{g} \\ \mathrm{b}_t + (\mathrm{u}\cdot\nabla)\mathrm{b} = \nu\Delta \mathrm{b} + (\mathrm{b}\cdot\nabla)\mathrm{u} \\ \nabla\cdot \mathrm{u} = \nabla\cdot \mathrm{b} = 0 \\ \rho_t + \mathrm{u}\cdot\nabla\rho = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Consideraremos essas equações em $\mathcal{Q}_T = \mathbb{R}^3 \times [0,T]$, $T>0$, com as seguintes condições iniciais

$$\begin{cases} \rho(x,0) = \rho_0(\mathrm{x}), \\ (\mathrm{u},\mathrm{w},\mathrm{b})(x,0) = (\mathrm{u}_0,\mathrm{w}_0,\mathrm{b}_0)(\mathrm{x}). \end{cases} \tag{2}$$

Para simplificar a notação, escreveremos, $\bar\mu = \mu+\chi$. Quando $\bar\mu = \gamma = \kappa = \nu = 0$ o sistema (1) se torna

$$\begin{cases} \rho \mathrm{u}_t + \rho(\mathrm{u}\cdot\nabla)\mathrm{u} + \nabla p = (\mathrm{b}\cdot\nabla)\mathrm{b} + \rho \mathrm{f} \\ \rho \mathrm{w}_t + \rho(\mathrm{u}\cdot\nabla)\mathrm{w} = \rho \mathrm{g} \\ \mathrm{b}_t + (\mathrm{u}\cdot\nabla)\mathrm{b} = (\mathrm{b}\cdot\nabla)\mathrm{u} \\ \nabla\cdot \mathrm{u} = \nabla\cdot \mathrm{b} = 0 \\ \rho_t + \mathrm{u}\cdot\nabla\rho = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Denotaremos a solução do problema (3)-(2) por $(\rho^0, \mathrm{u}^0, \mathrm{w}^0, \mathrm{b}^0)$.

Objetivo

O objetivo do nosso trabalho é estabelecer a convergência uniforme da solução do problema (1)-(2) para a solução do problema (3)-(2) quando as viscosidades e resistividade tendem a zero.

Resultados

Teorema Principal. *Considere* $0 < \bar\mu, \gamma, \nu \le 1$, $\gamma \ge \max\{\kappa, \chi\}$ *e assuma que*

$$\begin{gathered} \rho_0 \in C^0(\mathbb{R}^3), \quad \nabla\rho_0 \in H^2(\mathbb{R}^3), \\ 0 < m \le \rho_0(x,t) \le M < \infty, \\ \mathrm{u}_0, \mathrm{w}_0, \mathrm{b}_0 \in H^3(\mathbb{R}^3), \quad \nabla\cdot \mathrm{u}_0 = \nabla\cdot \mathrm{b}_0 = 0, \\ \mathrm{f}, \mathrm{g} \in L^2([0,T]; H^3(\mathbb{R}^3)). \end{gathered}$$

Então existe $T_0 \in (0,T]$, *independente de* $\bar\mu, \gamma$ *e* ν *tal que o problema* (1)-(2) *possui única solução* $(\rho, \mathrm{u}, \mathrm{w}, \mathrm{b})$ *que satisfaz*

$$\begin{gathered} \rho \in C^0(\mathbb{R}^3),\ \nabla\rho \in C^0([0,T_0]; H^2(\mathbb{R}^3)), \\ 0 < m \le \rho(x,t) \le M < \infty \\ \mathrm{u}, \mathrm{w}, \mathrm{b} \in C^0([0,T_0]; H^3(\mathbb{R}^3)), \\ \nabla \mathrm{u}, \nabla \mathrm{w}, \nabla \mathrm{b} \in L^2([0,T_0]; H^3(\mathbb{R}^3)) \\ \mathrm{u}_t, \mathrm{w}_t, \mathrm{b}_t \in L^2([0,T_0]; H^2(\mathbb{R}^3)). \end{gathered}$$

Resultados análogos também são válidos para a solução $(\rho^0, \mathrm{u}^0, \mathrm{w}^0, \mathrm{b}^0)$ *do problema* (3)-(2). *Além disso, temos*

$$\sup_{0\le t\le T_0} [\|\rho-\rho^0\|_{H^2} + \|\mathrm{u}-\mathrm{u}^0\|_{H^2} + \|\mathrm{w}-\mathrm{w}^0\|_{H^2} + \|\mathrm{b}-\mathrm{b}^0\|_{H^2}]$$

converge para zero quando

$$\bar\mu, \gamma, \nu \to 0.$$

Estimativas A Priori

Lema 1. *Seja*

$$\begin{aligned} \psi(t) = \int_0^t & \big(1 + \|\nabla\rho(\cdot,s))\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{u}(\cdot,s)\|_{H^2}^2 \\ & + \|\mathrm{w}(\cdot,s)\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{b}(\cdot,s)\|_{H^2}^2\big)^2\, ds. \end{aligned} \tag{4}$$

Para todo $(x,t) \in \mathcal{Q}_T = \mathbb{R}^3 \times [0,T]$, *temos*

$$m \le \rho(x,t) \le M \tag{5}$$

além disso, temos que

$$\|\nabla\rho(\cdot,t)\|_{H^2}^2 \le \|\nabla\rho_0(\cdot)\|_{H^2}^2 + C\psi(t). \tag{6}$$

Lema 2. *Seja*

$$\begin{aligned} A := 1 + \|\nabla\rho_0(\cdot)\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{u}_0(\cdot)\|_{H^3}^2 + \|\mathrm{w}_0(\cdot)\|_{H^3}^2 + \|\mathrm{b}_0(\cdot)\|_{H^3}^2 \\ + \int_0^T (\|\mathrm{f}(\cdot,t)\|_{H^3}^2 + \|\mathrm{g}(\cdot,t)\|_{H^3}^2)\, dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Para todo $t \in [0,T]$, *temos*

$$\begin{aligned} & \|\nabla\rho(\cdot,t)\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{u}(\cdot,t)\|_{H^3}^2 + \|\mathrm{w}(\cdot,t)\|_{H^3}^2 + \|\mathrm{b}(\cdot,t)\|_{H^3}^2 \\ & + \int_0^t (\|\mathrm{u}_t(\cdot,s)\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{w}_t(\cdot,s)\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{b}_t(\cdot,s)\|_{H^2}^2)\, ds \\ & + \bar\mu \int_0^t \|\nabla \mathrm{u}(\cdot,s)\|_{H^3}^2\, ds + \gamma\int_0^t \|\nabla \mathrm{w}(\cdot,s)\|_{H^3}^2\, ds \\ & + \nu\int_0^t \|\nabla \mathrm{b}(\cdot,s)\|_{H^3}^2\, ds \le C[A + \psi(t)]^3. \end{aligned}$$

Lema 3. *Existe* $T_0 \in [0,T]$ *independente de* $\bar\mu, \gamma, \nu$ *tal que*

$$\psi(t) \le A, \quad \forall\, t \le T_0.$$

Proposição 1. *Existe uma constante positiva* C *tal que*

$$\begin{aligned} & \sup_{0\le t\le T_0} [\|\nabla\rho(\cdot,t)\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{u}(\cdot,t)\|_{H^3}^2 + \|\mathrm{w}(\cdot,t)\|_{H^3}^2 + \|\mathrm{b}(\cdot,t)\|_{H^3}^2] \\ & + \int_0^{T_0} (\|\mathrm{u}_t(\cdot,t)\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{w}_t(\cdot,t)\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{b}_t(\cdot,t)\|_{H^2}^2)\, dt \\ & + \bar\mu\int_0^{T_0} \|\nabla \mathrm{u}(\cdot,t)\|_{H^3}^2\, dt + \gamma\int_0^{T_0} \|\nabla \mathrm{w}(\cdot,t)\|_{H^3}^2\, dt \\ & + \nu\int_0^{T_0} \|\nabla \mathrm{b}(\cdot,t)\|_{H^3}^2\, dt \le C. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \sup_{0\le t\le T_0} [\|\nabla\rho^0(\cdot,t)\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{u}^0(\cdot,t)\|_{H^3}^2 + \|\mathrm{w}^0(\cdot,t)\|_{H^3}^2 + \|\mathrm{b}^0(\cdot,t)\|_{H^3}^2] \\ & + \int_0^{T_0} (\|\mathrm{u}_t^0(\cdot,t)\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{w}_t^0(\cdot,t)\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{b}_t^0(\cdot,t)\|_{H^2}^2)\, dt \le C. \end{aligned}$$

Conclusão

Com o auxilio dessas estimativas conseguimos mostrar que

$$\begin{aligned} & \sup_{0\le t\le T_0} [\|\rho-\rho^0\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{u}-\mathrm{u}^0\|_{H^2}^2 + \|\mathrm{w}-\mathrm{w}^0\|_{H^2}^2 \\ & + \|\mathrm{b}-\mathrm{b}^0\|_{H^2}^2] \le C(\bar\mu + \gamma + \nu) T_0 \exp(C T_0). \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração do Teorema principal. Este é um importante resultado de regularização da solução do sistema magneto-micropolar tridimensional.

Referências

[1] BRAZ E SILVA, P.; CRUZ, F.W.; ROJAS-MEDAR, M.A. Vanishing viscosity for non-homogeneous asymmetric fluids in R3: the L2 case. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 420, n. 1, p. 207-221, 2014.

[2] ITOH, S. On the Vanishing Viscosity in the Cauchy Problem for Equations of a Nohomogeneous Incompressible Fluid II. Bull. Fac. Educ. Hirosaki Univ, v. 76, p. 33-40, 1996.

[3] ZHANG, J. The inviscid and non-resistive limit in the Cauchy problem for 3-D nonhomogeneous incompressible magneto-hydrodynamics. Acta Mathematica Scientia, v. 31, n. 3, p. 882-896, 2011.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq e ao IMPA pelo apoio financeiro.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada