Grupos tais que todo subgrupo tem defeito subnormal até 2

Millena Andrade da Silva[1] & Igor Lima[1]

Universidade de Brasília[1]

millena_andrade10@hotmail.com

Resumo

Neste trabalho estudamos os grupos em que todo subgrupo tem defeito subnormal até 2. Dividimos nossa investigação no estudo dos grupos de defeito $\mathbf{1}$ e de defeito $\mathbf{2}$. Para os grupos de defeito $\mathbf{1}$, apresentamos o Teorema de Dedekind-Baer que nos dará uma classificação dos grupos de Dedekind não abelianos. Para os grupos de defeito $\mathbf{2}$, apresentamos as classes $\mathscr{S}$, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{T}$ e estudamos as relações de continência entre as mesmas.

Introdução

Seja $\boldsymbol{n}$ um inteiro positivo. Um subgrupo $\boldsymbol{H}$ de um grupo $\boldsymbol{G}$ é chamado *n-subnormal* se existem subgrupos $\boldsymbol{H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n}$ tais que

$$\boldsymbol{H_0 = H \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd \cdots \lhd H_n = G.}$$

O tamanho da menor série subnormal de $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{G}$ é chamado de *defeito subnormal de* $\boldsymbol{H}$ *em* $\boldsymbol{G}$. O estudo da subnormalidade e o entendimento das séries subnormais pode simplificar o estudo da estrutura de um grupo em termos de estruturas mais simples ou até mesmo classificar determinados grupos.

- Grupos de defeito $\mathbf{1}$

  São grupos chamados grupos de Dedekind. Tais grupos foram estudados pelo matemático Richard Dedekind em 1897, que classificou os grupos finitos com essa propriedade, mais tarde, R. Baer estendeu o resultado do que chamaremos de Teorema de Dedekind-Baer para grupos infinitos.
- Grupos de defeito $\mathbf{2}$

  Para os grupos de defeito $\mathbf{2}$, nos baseamos, principalmente, nos artigos de Madahvianary [1] e Heneiken [2] que estudam as seguintes três classes de grupos:
  - A classe de grupos tais que todo subgrupo é $\mathbf{2}$-subnormal, denotada por $\mathscr{S}$.
  - A classe de grupos tais que todo subgrupo abeliano é $\mathbf{2}$-subnormal, denotada por $\mathscr{A}$.
  - A classe de grupos tais que todo subgrupo cíclico é $\mathbf{2}$-subnormal, denotada por $\mathscr{T}$.

Objetivos

1. Apresentar resultados sobre os grupos de Dedekind.
2. Dar ferramentas necessárias para mostrar o Teorema de Dedekind-Baer.
3. Estudar a nilpotência das classes $\mathscr{S}$, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{T}$ e as relações de continência entre elas.

Resultados

- **Grupos de Defeito 1**

  Teorema 1. *Se todo subgrupo cíclico em um grupo* $\boldsymbol{G}$ *é normal, então* $\boldsymbol{G}$ *é um grupo de Dedekind.*

  Teorema 2. *Todo grupo de Dedekind é nilpotente de classe no máximo* $\mathbf{2}$.

  Lema 1. *Seja* $\boldsymbol{G}$ *um grupo de Dedekind não abeliano, então* $\boldsymbol{G}$ *possui um subgrupo isomorfo a* $\boldsymbol{Q_8}$.

  Lema 2. *Sejam* $\boldsymbol{G}$ *um grupo hamiltoniano e* $\boldsymbol{\langle x, y\rangle = Q \leq G}$, $\boldsymbol{Q \cong Q_8}$. *Então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

  (i) $\boldsymbol{G = C_G(Q)Q}$.

  (ii) $\boldsymbol{G}$ *é um grupo de torção e* $\boldsymbol{C_G(Q)}$ *não tem elementos de ordem* $\mathbf{4}$.

  Teorema 3 (Dedekind, Baer)**.** *Todos os subgrupos de* $\boldsymbol{G}$ *são normais se, e somente se,* $\boldsymbol{G}$ *é abeliano ou* $\boldsymbol{G}$ *é o produto direto de* $\boldsymbol{Q_8}$ *com um 2-grupo abeliano elementar e um grupo* $\boldsymbol{A}$ *em que todos os seus elementos têm ordem ímpar, ou seja,* $\boldsymbol{G = Q \times A \times E}$, *onde* $\boldsymbol{Q \cong Q_8}$, $\boldsymbol{A}$ *é um grupo abeliano tal que todos os elementos possuem ordem ímpar e* $\boldsymbol{E}$ *é um* $\mathbf{2}$*-grupo abeliano elementar.*

- **Grupos de Defeito 2**

  Lema 3. $\boldsymbol{G \in \mathscr{T}}$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{[x, y, y] \in \langle y\rangle}$, *para todos* $\boldsymbol{x, y \in G}$.

  Lema 4. *Seja* $\boldsymbol{G}$ *um grupo. Então:*

  (i) $\boldsymbol{G \in \mathscr{S}}$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{[v, x, y] \in \langle x, y\rangle}$, *para todo* $\boldsymbol{x, y, v \in G}$*;*

  (ii) $\boldsymbol{G \in \mathscr{A}}$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{[v, x, y] \in \langle x, y\rangle}$, *para todo* $\boldsymbol{x, y, v \in G}$, *com* $\boldsymbol{[x, y] = 1}$.

  Teorema 4. *Assuma que* $\boldsymbol{G \in \mathscr{T}}$ *tem um elemento de ordem infinita. Então:*

  (i) $\boldsymbol{G}$ *é* $\mathbf{2}$*-Engel;*

  (ii) $\boldsymbol{\gamma_4(G) = (\gamma_3(G))^3 = 1}$.

  Teorema 5. *Se* $\boldsymbol{G \in \mathscr{T}}$ *e* $\boldsymbol{G}$ *é um grupo de torção, então* $\boldsymbol{\gamma_4(G) = 1}$.

  Teorema 6. *(i) Seja* $\boldsymbol{G}$ *um grupo de torção sem elementos de ordem par ou um grupo com um elemento de ordem infinita. Então* $\boldsymbol{G \in \mathscr{T}}$ *implica que* $\boldsymbol{G \in \mathscr{A}}$.

  (ii) Existe um $\mathbf{2}$*-grupo em* $\mathscr{T}$ *que não está em* $\mathscr{A}$*. Daí* $\mathscr{T}$ *nem sempre implica em* $\mathscr{A}$*.*

  (iii) Existe um grupo em $\mathscr{A}$ *que não está em* $\mathscr{S}$*. Daí* $\mathscr{A}$ *nem sempre implica em* $\mathscr{S}$*.*

Conclusão

Usando os Teoremas $\mathbf{2}$ e $\mathbf{3}$ podemos caracterizar os grupos de Dedekind e dar uma cota de nilpotência para tais grupos.

Juntos, os Teoremas $\mathbf{4}$ e $\mathbf{5}$ garantem que um grupo $\boldsymbol{G \in \mathscr{T}}$ é nilpotente de classe no máximo $\mathbf{3}$. Como $\mathscr{S} \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{T}$, então como todo grupo em $\mathscr{S}$ e todo grupo em $\mathscr{A}$ também está em $\mathscr{T}$, a nilpotência deverá ser no máximo $\mathbf{3}$ para qualquer grupo nas classes citadas. Assim, os grupos de defeito $\mathbf{1}$ possuem classe de nilpotência no máximo $\mathbf{2}$ e grupos de defeito $\mathbf{2}$ possuem classe de nilpotência no máximo $\mathbf{3}$. Este é um importante resultado para o estudo dessas classes e da subnormalidade.

Vimos também, no Teorema $\mathbf{6}$ que as classes de grupos estudadas, em geral, não são equivalentes.

Referências

[1] Mahdavi, K. *On groups with every subgroup 2-subnormal*. Archiv der Mathematik, 47(4):289–292, 1986.

[2] Heineken, H. *A class of three-engel groups*. J. Algebra, 17(3):341–345, 1971.

[3] Heineken, H. *Engelsche elemente der länge drei*. Illinois Journal of Mathematics, 5(4):681–707, 1961.

[4] Robinson, D. JS. *A Course in the Theory of Groups*. volume 80. Springer Science & Business Media, 2012.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo financiamento deste trabalho e ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.