Existência de ciclos limite e pseudo-ciclos para uma família de equações diferenciais de terceira ordem

Mayara D. A. Caldas & Ricardo M. Martins

Universidade Estadual de Campinas

mcaldas@ime.unicamp.br

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Neste trabalho, estudamos a equação diferencial

$$\dddot{z} + a\ddot{z} + b\dot{z} + abz = \varepsilon F(z, \dot{z}, \ddot{z}), \tag{1}$$

a qual é equivalente ao seguinte sistema diferencial de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - bx - abz + \varepsilon F(z, x, y), \\ \dot{z} = x. \end{cases} \tag{2}$$

Estamos interessados em estudar a existência de trajetórias fechadas para esse sistema em duas situações distintas.

Na primeira parte, consideramos $F(z, \dot{z}, \ddot{z}) = 1$ e $b = sgn(h(z, \dot{z}, \ddot{z}))$, em que $h(z, \dot{z}, \ddot{z}) = z^2 + (\dot{z})^2 + (\ddot{z})^2 - 1$. Assim, a equação diferencial (1) é equivalente ao sistema diferencial suave por partes

$$Z_{X_-X_+}(x, y, z) = \begin{cases} X_-(x, y, z), \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ X_+(x, y, z), \ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, \end{cases} \tag{3}$$

em que $X_-(x, y, z) = (y, -ay + x + az + \varepsilon, x)$ e $X_+(x, y, z) = (y, -ay - x - az + \varepsilon, x)$, o qual admite $S^2 = h^{-1}(\{0\})$ como variedade de descontinuidade.

Na segunda parte, lidamos com a equação diferencial (1) considerando $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, $b > 0$ e $F(z, \dot{z}, \ddot{z})$ um polinômio de grau n, a qual admite uma família de soluções periódicas isócronas em um plano invariante quando $\varepsilon = 0$.

Resultados Principais

Teorema 1. *Considere* $F(z, \dot{z}, \ddot{z}) = 1$ *e* $b = sgn(h(z, \dot{z}, \ddot{z}))$, *em que* $h(z, \dot{z}, \ddot{z}) = z^2 + (\dot{z})^2 + (\ddot{z})^2 - 1$. *Se*

$$\frac{|a|}{\sqrt{2}} < \varepsilon < |a| \quad ou \quad -|a| < \varepsilon < -\frac{|a|}{\sqrt{2}},$$

então o sistema (2) admite um pseudo-ciclo.

Teorema 2. *Considere* $\varepsilon \neq 0$ *suficientemente pequeno e* $b > 0$. *Se* $F(z, \dot{z}, \ddot{z})$ *um polinômio de grau* n *e*

$$\mathcal{F}(r) = \frac{1}{2\pi(a^2+b)} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{b}}} \left(\sqrt{b}\cos\left(\sqrt{b}\theta\right) - a\sin\left(\sqrt{b}\theta\right)\right) F\left(\sqrt{b}r\sin\left(\sqrt{b}\theta\right), -br\cos\left(\sqrt{b}\theta\right), r\cos\left(\sqrt{b}\theta\right)\right) d\theta$$

não é identicamente nula, então o número máximo de ciclos limite do sistema (2), *que podem bifurcar a partir das órbitas periódicas do plano* $\alpha = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + bz = 0\right\}$ *do sistema* $(2)|_{\varepsilon=0}$, *é* $\frac{n-1}{2}$ *se* n *é ímpar e* $\frac{n-2}{2}$ *se* n *é par.*

Ideia da Prova do Teorema 1

Os seguintes lemas auxiliam na prova do Teorema 1.

Lema 1. *Considere o sistema (3).*

a) *O plano* $\alpha_- = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -y + z = -\frac{\varepsilon}{a}\right\}$ *é invariante com respeito ao campo vetorial* X_-, *o qual se comporta como uma sela em* α_-.

b) *O plano* $\alpha_+ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = \frac{\varepsilon}{a}\right\}$ *é invariante com respeito ao campo vetorial* X_+, *o qual se comporta como um centro em* α_+.

Lema 2. *Os pontos de intersecção entre os planos* α_-, α_+ *e* $h(x, y, z) = 1$, *isto é,*

$$P = \left(-\frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2}}{a}, \frac{\varepsilon}{a}, 0\right) \ e \ Q = \left(\frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2}}{a}, \frac{\varepsilon}{a}, 0\right)$$

são pontos de tangência $Z_{X_-X_+}$.

Lema 3. *Considere as soluções* $x_{\alpha_+}(t)$ *e* $x_{\alpha_-}(t)$ *dos campos vetoriais* X_+ *e* X_-, *respectivamente, com o ponto* P *como condição inicial. Então*

a) *existe* t_- *tal que* $x_{\alpha_-}(t_-) = Q$;

b) *existe* t_+ *tal que* $x_{\alpha_+}(t_+) = Q$.

Lema 4. *Considere*

$$t_- = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2} + \varepsilon}{\varepsilon - \sqrt{a^2 - \varepsilon^2}}\right) \ e \ t_+ = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\right).$$

Então

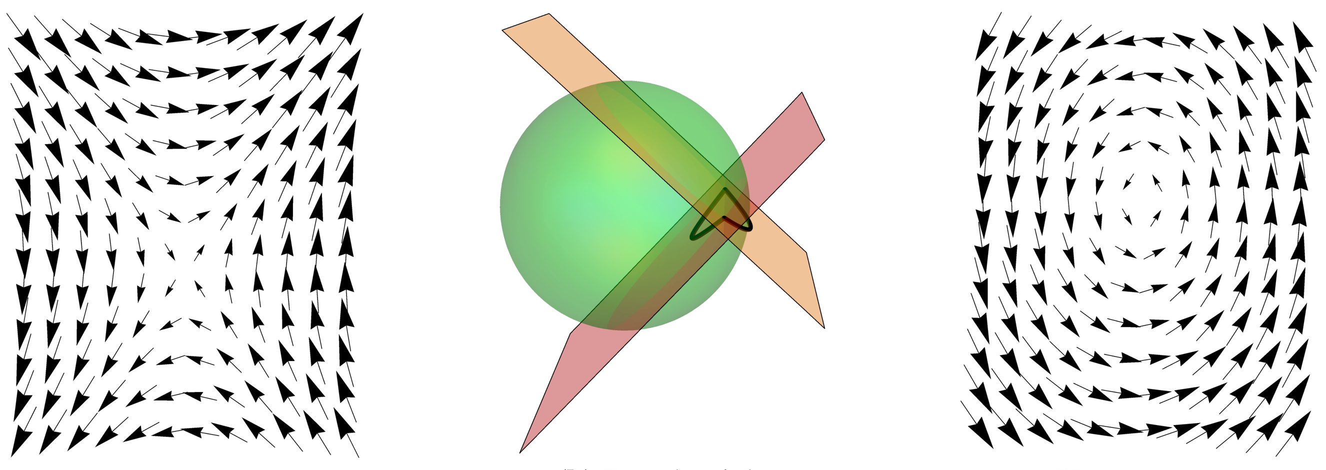
a) $t_+ > 0$ *se, e somente se,* $\varepsilon > 0$;

b) $t_+ < 0$ *se, e somente se,* $\varepsilon < 0$;

c) $t_- > 0$ *se, e somente se,* $\frac{|a|}{\sqrt{2}} < \varepsilon < |a|$;

d) $t_- < 0$ *se, e somente se,* $-|a| < \varepsilon < -\frac{|a|}{\sqrt{2}}$.

Lema 5. *Considere* t_+ *e* t_-. *Suponha que* $\frac{|a|}{\sqrt{2}} < \varepsilon < |a|$ *ou* $-|a| < \varepsilon < -\frac{|a|}{\sqrt{2}}$, *então* $\|x_{\alpha_+}(t)\|^2 > 1$ *para* $0 < t < t_+$ *e* $\|x_{\alpha_-}(t)\|^2 < 1$ *para* $0 < t < t_-$.



(a) X_- no plano α_- **(b)** Pseudo-ciclo **(c)** X_+ no plano α_+

Figura 1: Campo vetorial $Z_{X_-X_+}$ com $a = 5$ e $\varepsilon = 4$.

Ideia da Prova do Teorema 2

Os seguintes lemas auxiliam na prova do Teorema 2.

Lema 6. *O plano* $\alpha = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + bz = 0\right\}$ *é invariante com respeito ao sistema* $(2)|_{\varepsilon=0}$, *o qual se comporta como um centro em* α.

Lema 7. *Para* $\varepsilon \neq 0$ *suficientemente pequeno e para cada raiz* r_0 *do polinômio* $\mathcal{F}(r)$ *o sistema diferencial (2) admite um ciclo limite bifurcando a partir de uma órbita periódica do plano* α *do sistema não-perturbado* $(2)|_{\varepsilon=0}$.

Lema 8. *Considere*

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{b}}} \sin^m\left(\sqrt{b}\theta\right)\cos^n\left(\sqrt{b}\theta\right) d\theta.$$

Quando n *ou* m *é ímpar a integral é zero.*

Lema 9. *Quando* n *é par*

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{b}}} \sin^n\left(\sqrt{b}\theta\right)\cos^m\left(\sqrt{b}\theta\right) d\theta = \frac{2\pi(m-1)!!(n-1)!!}{\sqrt{b}(m+n)!!}.$$

Prova do Teorema 2. Considere

$$F(z, x, y) = \sum_{i+j+k=0}^{n} a_{ijk}x^i y^j z^k,$$

assim,

$$\mathcal{F}(r) = \frac{1}{\sqrt{b}(a^2+b)} \sum_{\substack{i+j+k=0 \\ i+j+k=2m+1 \\ i=2p}}^{n} a_{ijk}(-1)^j b^{\frac{i}{2}+j+\frac{1}{2}} r^{i+j+k} \frac{(i-1)!!(j+k)!!}{(i+j+k+1)!!} - \frac{a}{\sqrt{b}(a^2+b)} \sum_{\substack{i+j+k=0 \\ i+j+k=2m+1 \\ i=2p+1}}^{n} a_{ijk}(-1)^j b^{\frac{i}{2}+j} r^{i+j+k} \frac{i!!(j+k-1)!!}{(i+j+k+1)!!}.$$

Pelo Teorema de Descartes, concluímos a demonstração. □

Referências

[1] M. D. A. Caldas and R. M. Martins. On the existence of closed trajectories for the differential equation $\dddot{z} + a\ddot{z} + b\dot{z} + abz = \varepsilon f(z, \dot{z}, \ddot{z})$. *arXiv preprint arXiv:2210.07398*, 2022.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela CAPES.