First-time sensibilidade

Mayara Braz Antunes & Bernardo Carvalho

Universidade Federal Fluminense

mayaraantunes@id.uff.br

Introdução

Neste trabalho falaremos sobre a first-time sensibilidade (ft-sensibilidade) que é um caso particular de sensibilidade. Ft-sensibilidade generaliza o conceito de cw-expansividade e o shift no cubo de Hilbert $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ é um exemplo de homeomorfismo ft-sensível que não é cw-expansivo. Além disso, mostraremos que os homeomorfismos ft-sensíveis possuem contínuos instáveis locais com diâmetro uniforme em todos os pontos do espaço e, com determinadas condições, tais contínuos possuem propriedades hiperbólicas.

First-time sensibilidade

Consideremos um espaço métrico X satisfazendo as seguintes propriedades:

(P1) existe $r > 0$ tal que $B(x, r')$ é conexa para todo $r' \in (0, r)$ e todo $x \in X$;

(P2) a aplicação $(x, s) \to \overline{B(x, s)}$ é contínua na métrica Hausdorff.

Definição 1: Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo sensível definido em um espaço métrico compacto X satisfazendo as propriedades (P1) e (P2), com constante de sensibilidade $\varepsilon > 0$. Dado $x \in X$ e $r > 0$ seja $n_1(x, r, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ a primeira iterada de $B(x, r)$ que o diâmetro é maior do que ε, isto é,

$$\text{diam } f^{n_1(x,r,\varepsilon)}(B(x, r)) > \varepsilon \quad \text{e}$$

diam $f^j(B(x, r)) \leq \varepsilon$ para todo $j \in [0, n_1(x, r, \varepsilon)) \cap \mathbb{N}$. Chamamos o número $n_1(x, r, \varepsilon)$ de *primeiro tempo de crescimento* da bola $B(x, r)$. Dizemos que f é *first-time sensível* se existe uma sequência decrescente de funções, $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, de X em $\mathbb{R}^*_+$ tal que converge a 0 pontualmente, r_0 é uma função constante e para cada $0 < \gamma \leq \varepsilon$ existe m_γ satisfazendo as seguintes condições: $\forall\, x \in X$ e $\forall\, k$ tal que $r_k(x) \leq \gamma$,

(F1) $|n_1(x, r_{k+1}(x), \gamma) - n_1(x, r_k(x), \gamma)| \leq m_\gamma$;

(F2) $|n_1(x, r_k(x), \gamma) - n_1(x, r_k(x), \varepsilon)| \leq m_\gamma$.

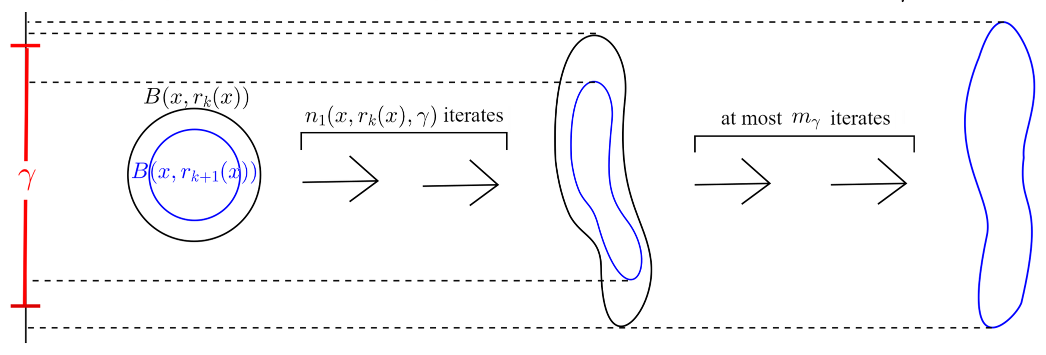

Figura 1: Propriedade F1

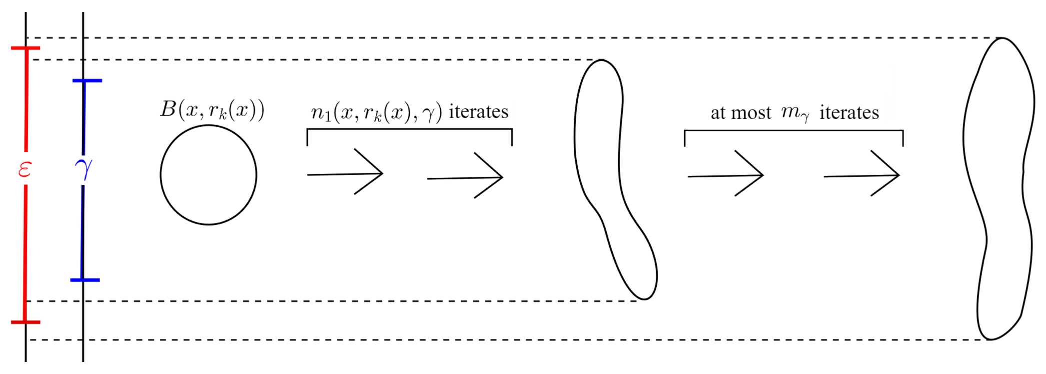

Figura 2: Propriedade F2

Exemplo 1: Se $f : X \to X$ é um homeomorfismo cw-expansivo de um espaço métrico compacto satisfazendo as propriedades (P1) e (P2), então f e f^{-1} são ft-sensíveis.

Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com direção instável não-trivial são first-time sensíveis.

Exemplo 2: Seja f um difeomorfismo de Anosov linear no Toro $\mathbb{T}^n$ e id a aplicação identidade de $\mathbb{S}^1$, então o produto $f \times id$ em $\mathbb{T}^{n+1}$ é first-time sensível.

Nosso principal resultado é o que vem a seguir, o qual generaliza um resultado de [2].

Teorema A: Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo definido em um espaço métrico compacto e conexo satisfazendo as propriedades (P1) e (P2). Então

(a) Se f satisfaz a propriedade (F1) da ft-sensibilidade, então para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{diam}(C^u_\varepsilon(x)) \geq \delta \text{ para todo } x \in X.$$

(b) Se f^{-1} satisfaz a propriedade (F1) da ft-sensibilidade, então para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{diam}(C^s_\varepsilon(x)) \geq \delta \text{ para todo } x \in X.$$

Denotamos por $C^s_\varepsilon(x)$ e $C^u_\varepsilon(x)$ as componentes conexas de x nos conjuntos estáveis e instáveis locais, $W^s_\varepsilon(x)$ e $W^u_\varepsilon(x)$, respectivamente.

Contínuos cw-estáveis/instáveis locais

A prova do Teorema A é na verdade mais importante do que resultado em si, pois nos dá uma forma alternativa de criar contínuos instáveis locais e pode ser resumida como segue. Para cada $x \in X$ e cada $m \in \mathbb{N}$ escolhemos um raio apropriado $r_m > 0$ tal que

$$n_1(f^{-m}(x), r_m, \varepsilon) \in (m, m + m_\varepsilon]$$

e isso implica que qualquer contínuo de acumulação da sequência

$$(f^m(B(f^{-m}(x), r_m)))_{m\in\mathbb{N}}$$

é um contínuo ε-instável, com diâmetro maior ou igual a δ que vem da continuidade uniforme de f^{m_ε}.

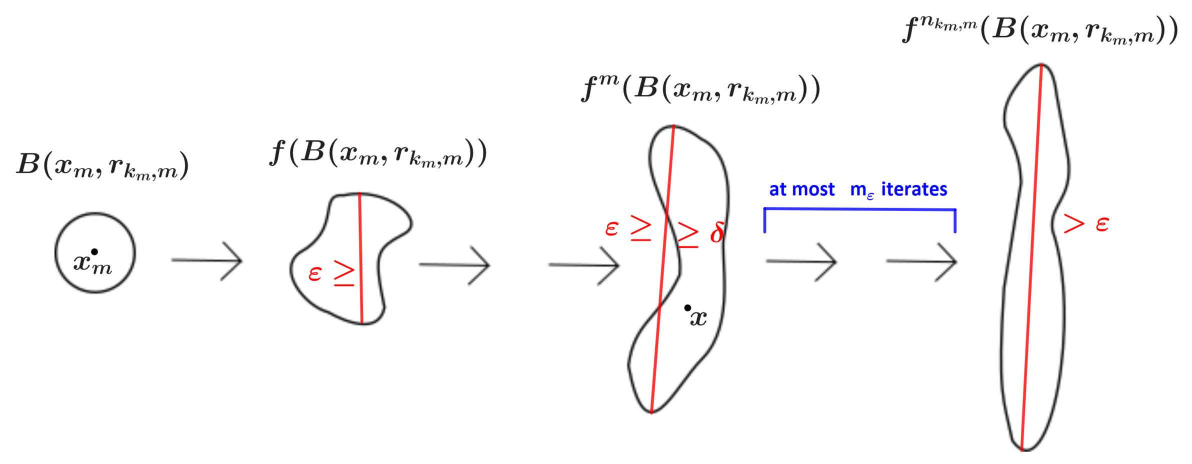

Figura 3: Construção dos contínuos cw-instáveis locais

Denotamos por $\mathcal{F}^u$ o conjunto de todos os contínuos obtidos como acima. Assim, se $C \in \mathcal{F}^u$,

$$C = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(\overline{B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})}),$$

com $x \in X$, $n_k \to \infty, r_{n_k} \to 0, \gamma \in (0, \varepsilon)$ e $n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \gamma) \in (n_k, n_k + m_\gamma]$. Os elementos de $\mathcal{F}^u$ são chamados de *contínuos cw-instáveis locais*.

Teorema B. Seja $f : X \to X$ first-time sensível com constante de sensibilidade $\varepsilon > 0$. Existe, $\delta > 0$ tal que, se C é um contínuo cw-instável local, então

$$\lim_{n\to\infty} f^{-n}(C) = 0 \text{ e } \text{diam}(f^n(C)) \geq \delta \quad \forall\, n \geq 2m_\gamma,$$

onde m_γ vem da definição de first-time sensibilidade e γ é a constante de sensibilidade associada ao contínuo C.

Ft-métrica hiperbólica

Seja $f\colon X \to X$ um homeomorfismo first-time sensível definido em um espaço métrico compacto X satisfazendo as Propriedades (P1) e (P2). Se $\mathcal{F}^u$ é invariante para f e fechada por união finita, então existe uma função $D\colon \mathcal{F}^u \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

1. Hiperbolicidade: existem constantes $\lambda \in (0, 1)$ e $\varepsilon > 0$ satisfazendo: se $C \in \mathcal{F}^u$ então

$$D(f^{-n}(C)) \leq 4\lambda^n D(C) \text{ para todo } n \geq 0.$$

2. Compatibilidade: para cada $\delta > 0$ existe $\gamma > 0$ tal que
   a) se diam$(C) < \gamma$, então $D(C) < \delta$,
   b) se $D(C) < \gamma$, então diam$(C) < \delta$.

Referências

[1] A. Artigue, B. Carvalho, W. Cordeiro, J. Vieitez. ”Continuum-wise hyperbolicity.”arXiv preprint arXiv:2011.08147 (2020).

[2] H. Kato. ”Continuum-wise expansive homeomorphisms.”*Canadian Journal of Mathematics* 45.3 (1993): 576-598.

Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG, à EEIMVR e ao IMPA.