Topologia e Complexidade de Conjuntos Invariantes Deslizantes de Shilnikov

Matheus G. C. Cunha & Douglas D. Novaes & Gabriel Ponce

IMECC - Unicamp

mathgccunha@ime.unicamp.com & ddnovaes@ime.unicamp.br & gaponce@ime.unicamp.br

1 Resumo

Utilizamos a teoria de sistemas de funções iteradas conformes (CIFS), e provamos que o a função de primeiro retorno proveniente de uma conexão de Shilnikov provinda de um sistema de Filippov induz naturalmente um CIFS regular, o que implica no conjunto invariante ser um conjunto de Cantor com dimensão de Hausdorff h entre 0 e 1, medida de Lebesgue nula, bem como a existência de medida h-conforme que induz uma medida ergódica em relação ao mapa de primeiro retorno.

2 Sistemas de Filippov e Conexões de Shilnikov

Consideremos $Z = (X, Y)$ um campo de Filippov definido no fecho de um aberto de $\mathbb{R}^3$, de maneira que ele possui um ponto de foco repulsor hiperbólico $p \in M^s$. Definimos uma conexão de Shilnikov quando existe $q \in \partial M^s$ ponto de tangência satisfazendo:

- A órbita que passa por q seguindo o fluxo definido por $\tilde{Z}$ converge para p no passado;
- A órbita que passa por q seguindo o fluxo definido por X chega a q em tempo finito.

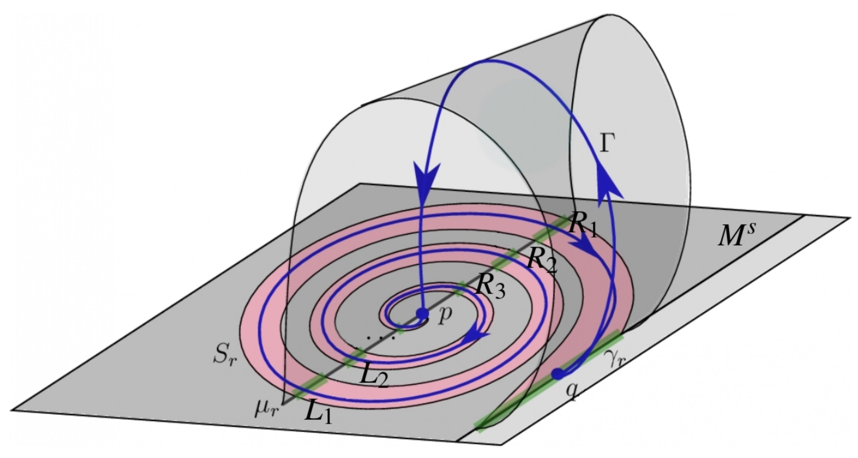

Figura 1: Representação de uma conexão de Shilnikov, destacando alguns de seus elementos.

Consideremos o comportamento da dinâmica em uma vizinhança $I \subseteq \partial M^s$ de q. Para isso, definamos o conjunto $\gamma_r := \overline{B_r(q) \cap \partial M^s}$.

Podemos estudar o comportamento de uma função de primeiro retorno $\pi : \mathcal{U}_r = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L_i^\gamma \cup R_i^\gamma) \to \gamma_r$, que está bem definida, e considerar o conjunto invariante

$$\Lambda := \left\{\xi \in \overline{U_r} : \pi^n(\xi) \in \overline{U_r}, \text{ para todo } n \geq 0\right\}.$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1 ([2, Proposição 2]). *Existe $r > 0$ suficientemente pequeno tal que $|\pi'(x)| > 1$, para todo $x \in \mathcal{U}_r$.*

3 CIFS (Conformal Iterated Function Systems)

Um IFS é um conjunto $\mathcal{F} = \left\{f_{i \in I} : \overline{D} \to \overline{D}\right\}$, onde cada f_i é uma contração uniforme em $\overline{D}$). Definimos também $\Delta \subseteq \overline{D}$, o chamado *conjunto invariante* do IFS $\mathcal{F}$ por

$$\Delta := p\left(I^{\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{\omega \in I^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n \geq 0} f_{\omega|_n}(X),$$

onde $f_\omega := f_{\omega_1} \circ \ldots \circ f_{\omega_k}$, para $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) \in I^k$. Um dos objetos que mais contém informações sobre o CIFS é a sua função de pressão, que introduziremos a seguir:

Definition 3.1 (Função Pressão de um CIFS)**.** Para cada inteiro $n \geq 0$, considere a função $P_n(t) := \sum_{\omega \in I^n} ||f_\omega'||^t$. Dizemos que a *pressão do CIFS* é a função dada por

$$P(t) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P_n(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\omega \in I^n} ||f_\omega'||^t\right).$$

Além disso, dizemos que o CIFS é t_0-*regular* se existe algum $t_0 \geq 0$ com $P(t_0) = 0$.

Algumas propriedades da função pressão e da regularidade do CIFS são apresentadas a seguir:

Proposição 3.1. *A função pressão possui as seguintes cotas: $-t \log K + \log P_1(t) \leq P(t) \leq \log P_1(t)$, onde $K > 1$ é a constante da condição de conformalidade.*
Seja $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ um CIFS com conjunto invariante Δ. Se $\mathcal{F}$ é t_0-regular, então $\dim_{\mathrm{H}}(\Delta) = t_0$, onde $\dim_{\mathrm{H}}(\cdot)$ é a dimensão de Hausdorff de um conjunto.
Além disso, o CIFS $\mathcal{F}$ é t_0-regular se, e somente se, existe uma medida t_0-conforme no conjunto invariate Δ, isto é, existe uma medida $m = m_{t_0}$ satisfazendo:

1. *$m(\Delta) = 1$;*
2. *$m(f_i(A)) = \int_A |f_i'|^{t_0} dm$, para qualquer A boreliano;*
3. *$m(f_i(X) \cap f_j(X)) = 0$, se $i \neq j$.*

4 Resultados Principais

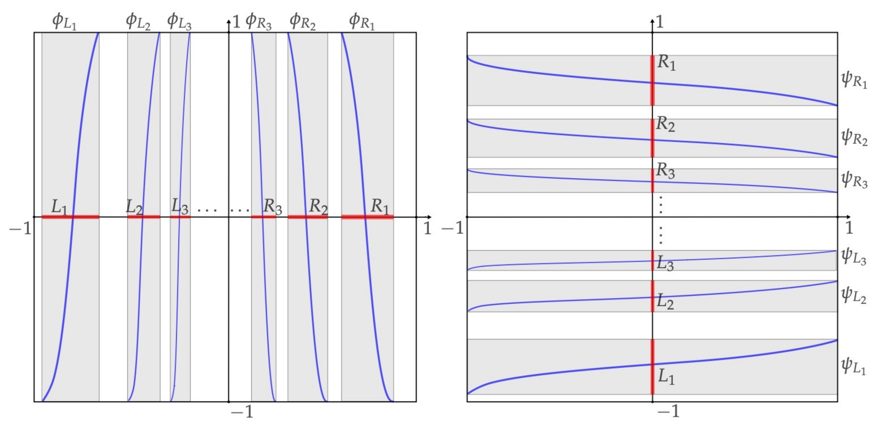

Figura 2: Representação do conjunto de funções Φ e do CIFS Ψ.

Teorema. 4.1. *Os conjuntos invariantes Λ (da função de primeiro retorno) e Δ (do CIFS) coincidem. Além disso, existe $r > 0$ suficientemente pequeno tal que o CIFS Ψ_r é t_0-regular, para algum $0 < t_0 < 1$.*

Demonstração. Para isso, basta observarmos que o sistema pode ser linearizado utilizando o Teorema de Hartman-Grobman, e que portanto a função pressão está limitado por uma série geometrica (dependente em t).
Daí, basta observar que numa vizinhança do ponto q, as séries ficam limitadas entre 0 e 1.
A continuidade de $P^r(t)$ implica que existe um t_0 com $P^r(t_0) = 0$.
Além disso, $\dim_{\mathrm{H}}(\Lambda_{U_r}) < 1$ implica que $\Lambda_{U_r} \cup \{q\}$ é totalmente desconexo, enquanto que [2, Teorema A] nos garante que $\Lambda_{U_r} \cup \{q\}$ é compacto, e é possível provar que todos os pontos de $\Lambda_{U_r} \cup \{q\}$ são pontos limites. Logo, $\Lambda_{U_r} \cup \{q\}$ é um conjunto de Cantor.
Por fim, temos também garantida a existência de uma medida t_0-conforme no conjunto invariante Λ. Tal medida pode ser adaptada para gerar uma medida $\tilde{m}_{t_0}$, ergódica em relação à ação do deslocamento nos índices das iteradas induzidas pelo CIFS [1, Teorema 8.2], o que se traduz em ergodicidade na função de primeiro retorno. □

Referências

[1] R. Daniel Mauldin and Mariusz Urbański. Dimensions and measures in infinite iterated function systems. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 73(1):105–154, 1996.

[2] Douglas D. Novaes, Gabriel Ponce, and Régis Varão. Chaos induced by sliding phenomena in Filippov systems. *J. Dynam. Differential Equations*, 29(4):1569–1583, 2017.

[3] Douglas D. Novaes and Marco A. Teixeira. Shilnikov problem in Filippov dynamical systems. *Chaos*, 29(6):063110, 8, 2019.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES e à FAPESP pelo apoio financeiro.