Aproximação por mínimos quadrados de uma onda sonora

Matheus Brum de Campos[1] & Saradia Della Flora[2] & Carmen Vieira Mathias[3]

Universidade Federal de Santa Maria - RS

[1]matheus.campos@acad.ufsm.br
[2]saradia.flora@ufsm.br
[3]carmen@ufsm.br

Introdução

O som é uma onda do tipo mecânica, tridimensional e longitudinal. Os sons são percebidos quando incidem sobre o aparelho auditivo, que são traduzidos em impulsos elétricos e direcionados ao cérebro, que os interpreta. Os seres humanos são capazes de ouvir uma faixa de frequências sonoras, no intervalo de 20 a 20000 ciclos por segundo (cps), aproximadamente. Para o sistema auditivo humano, o tipo mais elementar de onda sonora assemelha-se a uma onda senoidal que pode ser definida como uma função do tempo t por

$$q(t) = A_0 + Asen(\omega t - \delta)$$

onde $q(t)$ representa a pressão atmosférica no tímpano, no instante t, A_0 é a pressão atmosférica normal do ambiente, A é a amplitude da onda, ω é a frequência da onda (em cps) e δ é o ângulo de fase da onda. Se uma onda sonora complexa é uma soma finita de componentes senoidais:

$$A_0 + A_1 sen(\omega_1 t - \delta_1) + \cdots + A_n sen(\omega_n t - \delta_n) \quad (1)$$

essa e uma onda senoidal tem a mesma resposta do ouvido. Agora, se considerarmos uma onda sonora periódica $p(t)$ que não seja uma soma finita de ondas senoidais, é possível garantir que existe alguma onda sonora $q(t)$ como a dada em (1), que produz o mesmo estímulo sonoro para o ouvido que $p(t)$ em um período T. Em termos matemáticos, encontrar tal função significa resolver um problema de mínimos quadrados.

Problema

Precisamos "escolher" uma função $q(t)$ que seja uma boa aproximação para $p(t)$, isto é, que o erro $e(t) = p(t) - q(t)$ não seja percebido pelo ouvido. Este erro é usado para definir o seguinte critério:

$$\int_0^T [e(t)]^2 dt = \int_0^T [p(t) - q(t)]^2 dt \quad (2)$$

e deve ser o menor possível. A função $q(t)$ dada em (2) é a aproximação de mínimos quadrados de $p(t)$ no espaço $C[0, T]$. Podemos provar que a função que minimiza o erro quadrático médio é

$$q(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} a_i cos\frac{2i\pi}{T}t + \sum_{i=1}^{n} b_i sen\frac{2i\pi}{T}t,$$

onde n é o maior inteiro tal que $\frac{n}{T}$ não é maior que 20000 cps,

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T p(t) cos\left(\frac{2kt\pi}{T}\right) dt, \ \ 0 \leq k \leq n,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T p(t) sen\left(\frac{2kt\pi}{T}\right) dt, \ \ 1 \leq k \leq n.$$

Exemplo: Vamos considerar uma onda sonora $p(t)$ no formato de serra, que possui uma frequência de 5000 cps, conforme Figura 1.

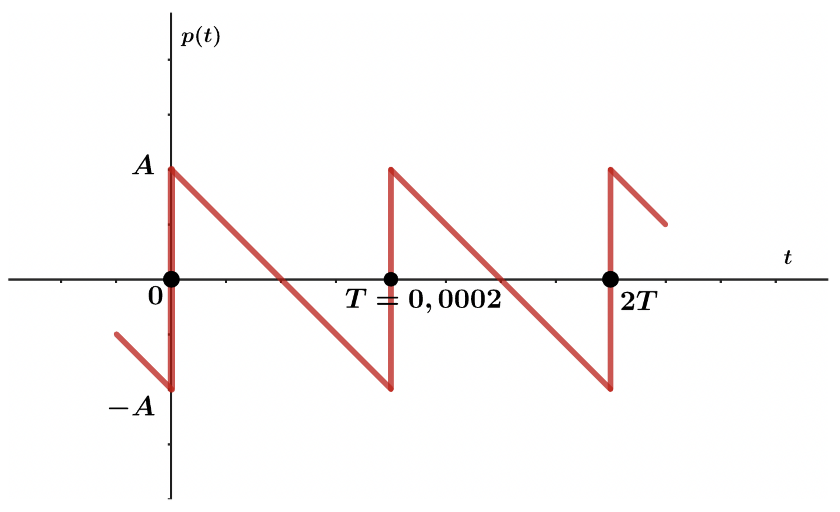

Figura 1: Onda Serreada $p(t)$

Suponhamos que a pressão atmosférica normal é ao nível zero e a amplitude máxima da onda é A. Neste caso, $T = 1/5000 = 0,0002$ segundo e no intervalo de $t = 0$ a $t = T$, $p(t)$ é dada por:

$$p(t) = \frac{2A}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right).$$

Desenvolvimento

Primeiramente, vamos calcular os coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{2A}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right) dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{2A}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right) cos\left(\frac{2kt\pi}{T}\right) dt = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{2A}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right) sen\left(\frac{2kt\pi}{T}\right) dt = \frac{2A}{k\pi},$$

$1 \leq k \leq n$. Como $\frac{k}{0,0002} \leq 20000$, então a aproximação por mínimos quadrados $q(t)$ para $p(t)$ é:

$$\frac{2A}{\pi}\left(sen\frac{2\pi}{T}t + \frac{1}{2}sen\frac{4\pi}{T}t + \frac{1}{3}sen\frac{6\pi}{T}t + \frac{1}{4}sen\frac{8\pi}{T}t\right).$$

Além disso, os quatro termos senoidais tem frequências de 5000, 10000, 15000 e 20000 cps, respectivamente. O gráfico a seguir (Figura 2) apresenta o gráfico de $p(t)$ e $q(t)$ ao longo de um período. Mesmo que se $q(t)$ não for uma boa aproximação ponto a ponto de $p(t)$, ambas produzem o mesmo estímulo sonoro para o ouvido.

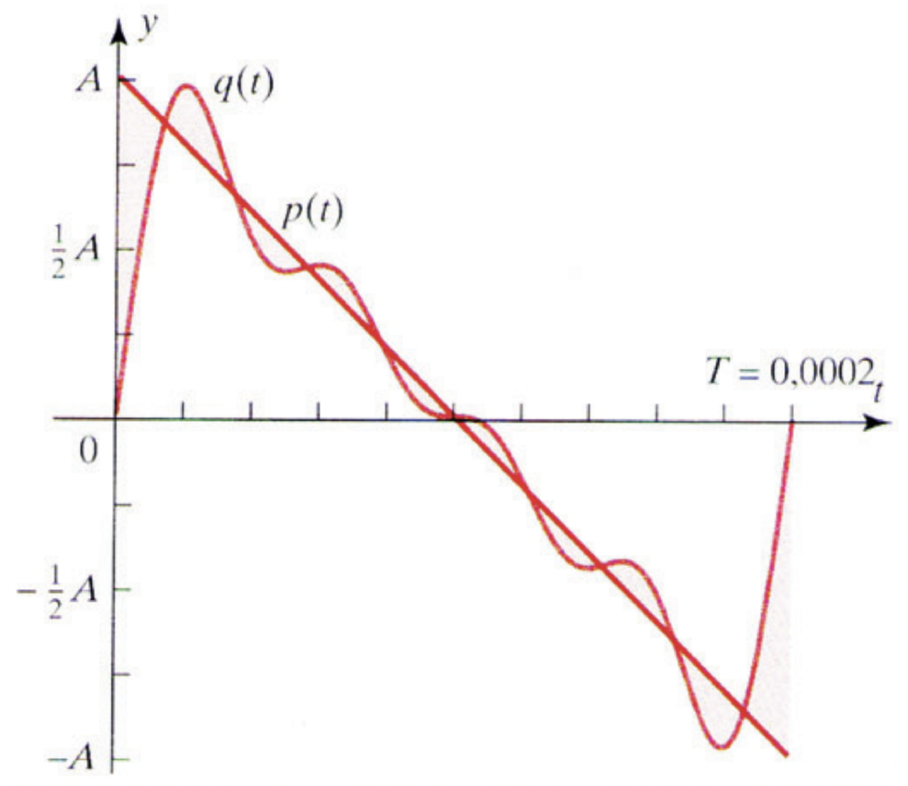

Figura 2: Gráficos das ondas $p(t)$ e $q(t)$

A aproximação por mínimos quadrados melhora à medida que aumentamos o número de termos do polinômio trigonométrico que aproxima.

Recursos Tecnológicos

O uso de *softwares* como o GeoGebra contribuem na aprendizagem e na compreensão de problemas, pois permite por meio de tecnologias digitais simular experiências reais, fazer a mudança de parâmetros, além da comparação e verificação de resultados.

Figura 3: QR Code

Conclusão

A partir dessa aplicação fica evidente como a Álgebra linear como ser utilizada como ferramenta na solução de problemas em outras áreas, neste caso, na Biofísica.

Trabalho apoiado pelo programa PET - MEC/FNDE.

Referências

[1] HOWARD, Anton & RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

[2] VIGINESKI, I. W. S. ; LOPES, E. M. C. **Modelo de Mínimos Quadrados para a Audição Humana**. Horizonte Científico (Uberlândia) , v. 8, p. 1-28, 2014.