Ends do Grupo Cíclico Infinito

Mateus Fernando Araújo Silva & Francielle Rodrigues de Castro Coelho

Universidade Federal de Uberlândia

mateus.fernando@ufu.br

Resumo

O número de ends de um grupo, definido por Specker, é a dimensão $\mathbb{Z}_2$ de um quociente de espaços vetoriais. O principal objetivo deste trabalho é apresentar o cálculo do ends do grupo cíclico infinito.

Introdução

Em 1950, Specker, definiu de forma algébrica o número de ends de um grupo G qualquer. Neste caso, o conceito de ends de um grupo G, $e(G)$, é definido como a dimensão do espaço quociente $Q(G)/F(G)$ sobre $\mathbb{Z}_2$, $e(G) = dimQ(G)/F(G)$.

Neste trabalho, além de apresentar conceitos e resultados sobre ends de um grupo G, calculamos e(G), onde G é um grupo cíclico infinito.

As principais referências para o desenvolvimento deste trabalho foram [1], [2] e [3].

Ends de Grupos

Definição 1. *Seja $A \neq \emptyset$, o conjunto $P(A) = \{X | X \subset A\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$ com a operação soma sendo a diferença simétrica, isto é, $X + Y = X \triangle Y$. E a multiplicação por escalar $\mathbb{Z}_2 \times P(A) \to P(A)$ dada por $\overline{0} \cdot X = \emptyset$ e $\overline{1} \cdot X = X$.*

Definição 2. *Sejam $A \neq \emptyset$ e $F(A) = \{X \in P(A) | X$ é finito$\}$, $F(A)$ é um subespaço do $\mathbb{Z}_2-$espaço vetorial $P(A)$.*

Definição 3. *Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $Q(G) = \{X \subset G | X + gX \in F(G), \forall g \in G\}$, $Q(G)$ é um subespaço vetorial de $P(G)$.*

Observação 4. *Se $X \in F(G)$ então $X + gX$ será finito, para todo $g \in G$. Daí, $X \in Q(G)$, isto é, $F(G) \subset Q(G)$. Além disso, $F(G)$ é um subespaço vetorial de $Q(G)$.*

Definição 5. *Dado um grupo G, o número de ends de G, denotado por $e(G)$, é definido por $e(G) := dim_{\mathbb{Z}_2}(Q(G)/F(G))$, que denotamos apenas por $dim(Q(G)/F(G))$.*

Proposição 6. *Seja G um grupo.*

(i) Se G é infinito, então $\overline{\emptyset}$ e $\overline{G}$ são elementos distintos em $Q(G)/F(G)$ e portanto, $e(G) \geq 1$.

(ii) G é finito se, e somente se, $e(G) = 0$.

(iii) $e(G) \geq 2$ se, e somente se, existe $\overline{A} \in Q(G)/F(G)$ tal que $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{A} \neq \overline{G}$. Neste caso, $\overline{\emptyset}, \overline{A}, \overline{A^c}, \overline{G}$ são elementos distintos em $Q(G)/F(G)$.

(iv) $e(G) = 2$ se, e somente se, existe $\overline{A}$ como em (iii) tal que para qualquer $\overline{B} \in Q(G)/F(G)$, $\overline{B} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{B} \neq \overline{G}$ tem-se $\overline{B} = \overline{A}$ ou $\overline{B} = \overline{A^c}$.

Teorema 7. *Se G é o grupo cíclico infinito, isto é, $G = [a] \cong \mathbb{Z}$, então $e(G) = 2$.*

Demonstração. De acordo com a proposição 6, basta mostrar que existe $\overline{A} \in Q(G)/F(G)$ tal que $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{A} \neq \overline{G}$, e para qualquer $\overline{B} \in Q(G)/F(G)$, $\overline{B} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{B} \neq \overline{G}$ temos que $\overline{B} = \overline{A}$ ou $\overline{B} = \overline{A^c}$. Para isso, seja $A = \{a^n | n > 0\} \subset G$. Assim, $\overline{A} \in Q(G)/F(G)$ e $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$.

Afirmação: Se $\overline{B} \in Q(G)/F(G)$ então para quase todo n (isto é, exceto um número finito $n_1, ..., n_r$) $a^n \in B$ implica que $a^{n-1} \in B$.

Pela afirmação pode existir apenas um número finito de elementos de B que satisfaz: $a^n \in B$ mas $a^{n+1} \notin B$ ou $a^{n-1} \notin B$. Em particular, isto obviamente é verdadeiro se B é finito (assim o caso de interesse é quando B é infinito) e também é verdadeiro para $B = A = \{a^n | n > 0\}$ pois apenas para $n = 1$ tem-se que $a^n \in B$ mas $a^{n-1} \notin B$. Para $n \geq 2$, $a^n \in B$ e temos $a^{n+1} \in B$ e $a^{n-1} \in B$.

Agora, dado $\overline{B} \in Q(G)/F(G)$ e A como acima, temos as quatro seguintes possibilidades para os conjuntos $B \cap A$ e $B \cap A^c$:

(i) $B \cap A$ finito e $B \cap A^c$ finito.

Isso implica em B ser finito pois $B = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$.

Logo, $\overline{B} = \overline{\emptyset}$.

(ii) $B \cap A$ infinito e $B \cap A^c$ infinito.

Do fato de $B \cap A$ ser infinito obtemos que B é infinito e da afirmação anterior segue que existe um inteiro positivo m_1 tal que $a^n \in B \cap A$, $\forall n > m_1$. Para ver isto, tome $m_0 = max\{n_1, ..., n_r\}$ onde $n_1, ..., n_r$ são os inteiros dados na afirmação. Como $B \cap A$ é infinito, $\exists m_1 > m_0$, $m_1 > 0$ tal que $a^{m_1} \in B \cap A$ e como $m_1 \neq n_i$, $i = 1, ..., r$, então $a^{m_1+1}, a^{m_1+2}, ... \in B \cap A$, isto é, $a^m \in B \cap A$, $\forall m > m_1$. Consequentemente, $A \cap B^c \subset \{a^k | 0 \leq k \leq m_1\}$ e portanto, é finito.

Analogamente, usando que $B \cap A^c$ é infinito e a afirmação anterior, temos que existe um inteiro m_2 tal que $a^n \in B \cap A^c$, $\forall n > m_2$. Tome $m_0 = min\{n_1, ..., n_r\}$. Como $B \cap A^c$ é infinito, $\exists m_2 < m_0$, $m_2 < 0$ tal que $a^{m_2} \in B \cap A^c$ e tem-se $a^m \in B \cap A^c$, $\forall m < m_2$. Daí, $A^c \cap B^c \subset \{a^k | m_2 \leq k \leq 0\}$ e portanto, é finito.

Logo, $B^c = B^c \cap (A \cup A^c) = (B^c \cap A) \cup (B^c \cap A^c)$ é finito.

Assim, $\overline{B^c} = \overline{\emptyset}$, ou equivalentemente, $\overline{B} = \overline{G}$.

(iii) $B \cap A$ finito e $B \cap A^c$ infinito.

Como vimos em (ii), $B \cap A^c$ infinito implica em $A^c \cap B^c$ finito.

Logo, $B + A^c = (B \cap A) \cup (B^c \cap A^c)$ é finito e portanto, $\overline{B} = \overline{A^c}$.

(iv) $B \cap A$ infinito e $B \cap A^c$ finito.

Conforme vimos em (ii), $B \cap A$ infinito implica em $A \cap B^c$ finito.

Assim, $B + A = (B \cap A^c) \cup (B^c \cap A)$ é finito. Logo, $\overline{B} = \overline{A}$.

Daí, dado qualquer $\overline{B} \in Q(G)/F(G)$ com $\overline{B} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{B} \neq \overline{G}$ tem-se que $\overline{B} = \overline{A}$ ou $\overline{B} = \overline{A^c}$.

Portanto, $e(G) = 2$. □

Exemplo 8. *Em particular, quando $G = \mathbb{Z}$, o conjunto dado na demonstração do teorema anterior é $A = \{1, 2, ...\} = \mathbb{N}^*$, $A^c = \{..., -2, -1, 0\}$, $Q(\mathbb{Z})/F(\mathbb{Z}) = \{\overline{\emptyset}, \overline{\mathbb{Z}}, \overline{A}, \overline{A^c}\}$ e uma base para $Q(\mathbb{Z})/F(\mathbb{Z})$ é $\{\overline{A}, \overline{A^c}\}$.*

Conclusão

A teoria de ends de grupos, tem sua relevância em algumas áreas da Matemática, por exemplo, na Álgebra e na Topologia Algébrica. Na Álgebra, está relacionada com decomposição de grupos e classificação de grupos e na Topologia Algébrica, está relacionada com a teoria de cohomologia de grupos.

Referências

[1] SANTOS, A.P. *Cohomologia de Grupos e Invariantes Algébricos*. Dissertação de Mestrado. IBILCE/UNESP, 2006.

[2] SCOTT, G. P., WALL, C. T. C. *Topological Methods in Group Theory*. London Math. Soc. Lect. Notes Series 36, Homological Group Theory, 167-174, 1972.

[3] SPECKER, F. *Endenverbande von Raume und Gruppen*. Math. Annalen 122, p.167-174, 1950.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.