

Usando topologia diferencial para resolver um sistema de equações diferenciais parciais

C.S. Eschenazi¹, W.J. Lambert², M.M. López-Flores³,
D. Marchesin³, C.F.B. Palmeira⁴ & B.J. Plohr⁵

UFMG¹, UNIFAL², IMPA³, PUC-Rio⁴, Los Alamos, USA⁵

mmlf@impa.br³



Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

Dedicatória

Os autores dedicam este trabalho a James Glimm que com seu artigo fundamental [1], em 1965, abriu essa área de pesquisa.

Resumo

Considera-se um sistema de 2 EDPs para descrever a evolução no tempo de 3 fluidos e usa-se uma variedade de dimensão 3 para obter as soluções. Figuras são apresentadas em um caso simples: Caso IV na classificação Schaeffer-Shearer [2], modificada por Palmeira [3].

Introdução

Uma imagem comum quando nos referimos à perfuração de um poço de petróleo é a do petróleo jorrando de um poço. Isto é causado pela presença de gás no poço. Com o tempo, a pressão diminui e o óleo para de brotar. Então injeta-se água e recupera-se a mistura água, óleo e gás. Um modelo para isso é dado pelo sistema de 2 leis de conservação:

$$W_t + F(W)_x = 0, \quad (1)$$

onde $W = (u(x, t), v(x, t))$, $F = (f, g)$, que descreve a evolução no tempo de uma mistura de 3 fluidos em uma direção espacial, sendo u e v as densidades dos fluidos (3 fluidos geram 3 densidades, mas como a soma das densidades é 1, ficam 2 variáveis u e v). Estamos interessados em estudar o problema de Riemann, que consiste na Eq. (1) com condições iniciais:

$$W(x, 0) = \begin{cases} W_L = (u_L, v_L), & \text{se } x < 0, \\ W_R = (u_R, v_R), & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Queremos estudar 3 tipos de solução: rarefações, choques e compostas, em um modelo em que $F = (f, g)$ são dois polinômios de grau 2. Para isso utilizamos uma mudança de variáveis e introduzimos o conceito de variedade de onda, uma variedade de dimensão 3, em um espaço de dimensão 5 ($\mathbb{R}^4 \times S^1$). Nesta variedade as soluções são representadas por sequências de diferentes tipos de curva, chamadas curvas de rarefação, curvas de choque e curvas compostas que depois são projetadas no plano (u, v) . Nem toda sequência de curvas representa uma solução. É necessário satisfazer certas condições ditas de admissibilidade. Na variedade de onda temos superfícies bidimensionais, chamadas característica, sônica à esquerda e sônica à direita, que dividem a variedade em regiões onde a classificação dos choques é a mesma. As curvas de choque trocam de tipo ao cruzar essas superfícies, ver Fig.1. As curvas de rarefação correspondem a curvas na superfície característica, que nessas novas variáveis é um plano. As curvas compostas são combinações de curvas de choque e rarefação e estão na superfície sônica à direita.

As figuras abaixo foram obtidas utilizando coordenadas que facilitam cálculos e visualização dessas superfícies, ver [4], para um caso particular: caso IV de Schaeffer-Shearer [2].

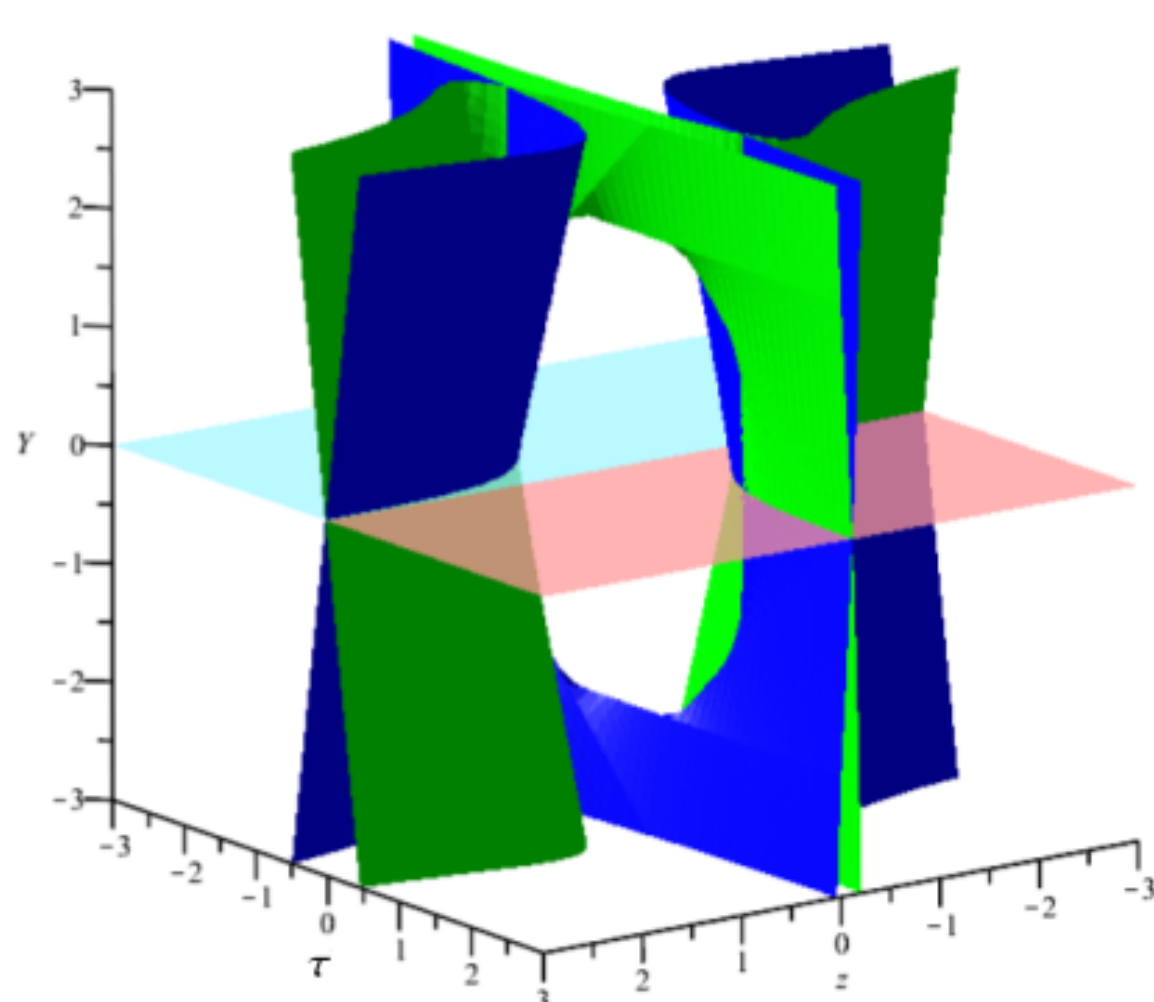


Figura 1: Superfície característica (plano azul claro - rosa), superfícies sônica à esquerda (verde) e sônica à direita (azul) na variedade de onda.

Solução do problema de Riemann

O diagrama abaixo representa a forma clássica de se resolver o problema de Riemann. As curvas se intersectam no

espaço de estados gerando figuras complexas como as mostradas na Fig.2. Quando consideradas na variedade de ondas essas curvas adquirem configurações mais “simples”, ver Fig.3 e Fig.4. Isso ocorre porque na variedade de ondas essas curvas são folheações unidimensionais (com singularidades) das superfícies mostradas na Fig.1.

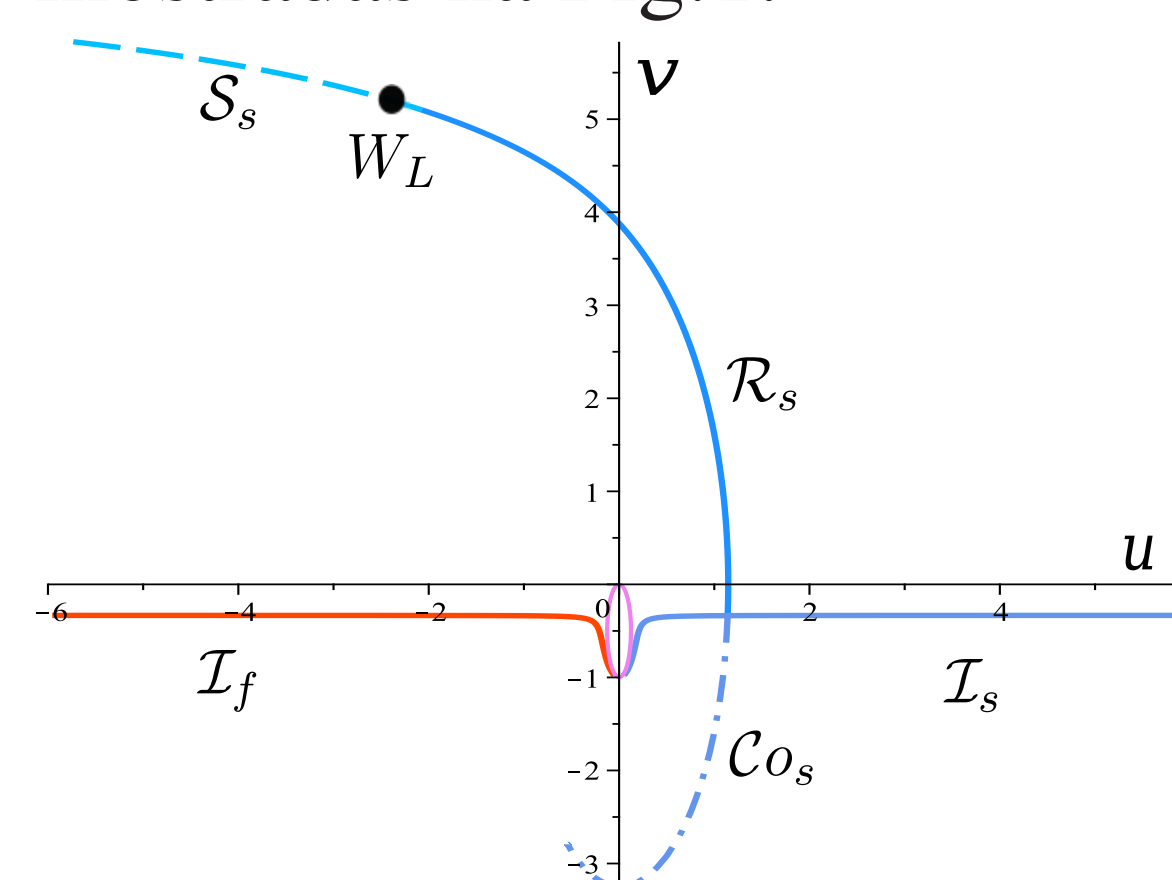


Figura 2: Representação das curvas de onda de W_L no espaço de estados.

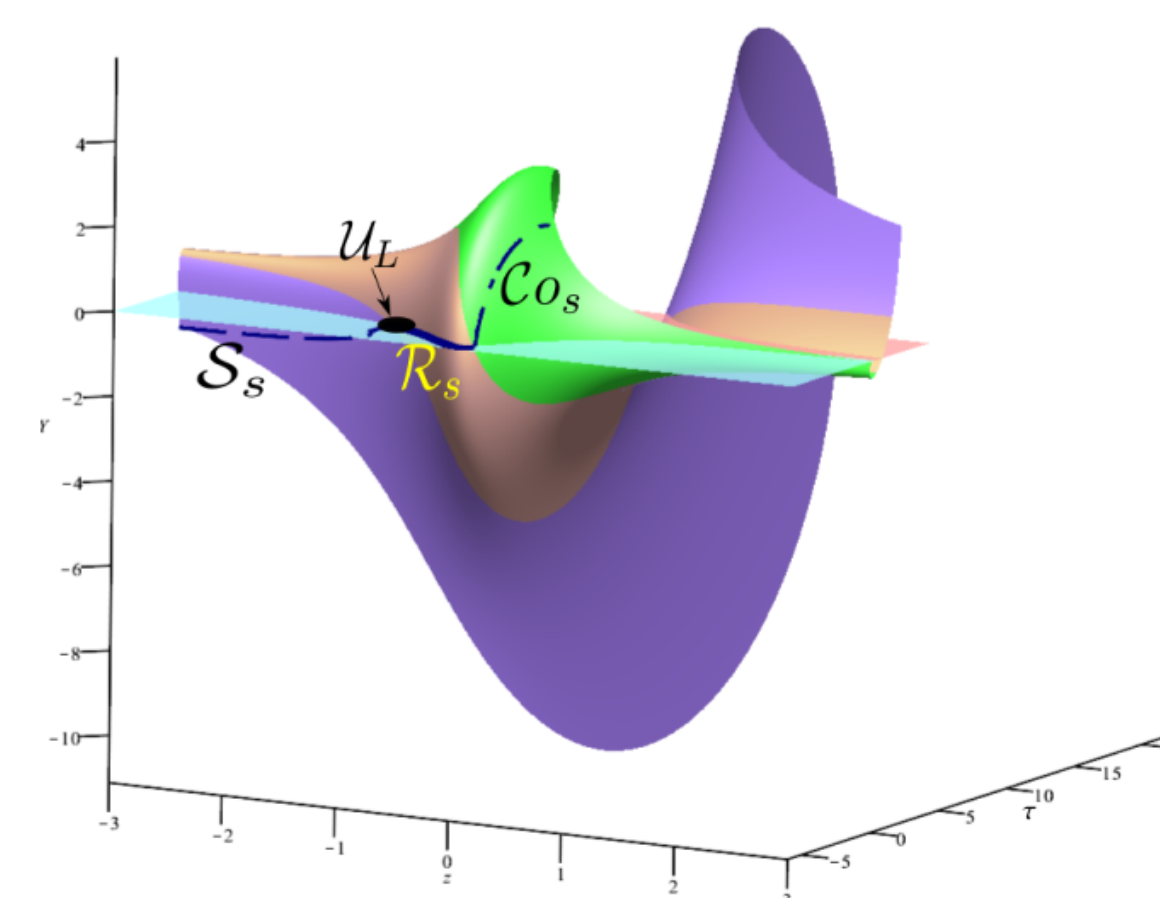


Figura 3: Representação das curvas da Fig.2 na variedade de ondas.

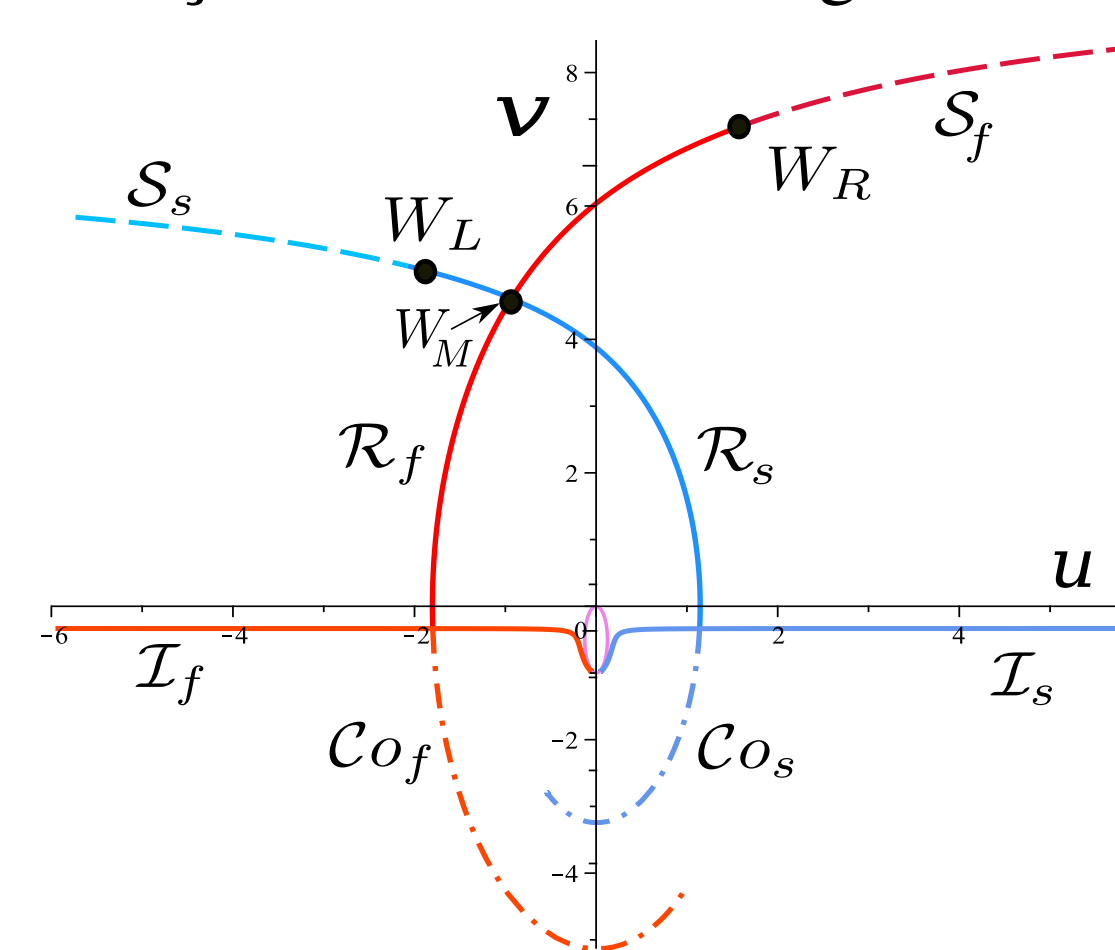


Figura 4: Representação clássica da resolução do problema de Riemann intersectando curvas no espaço de estados.

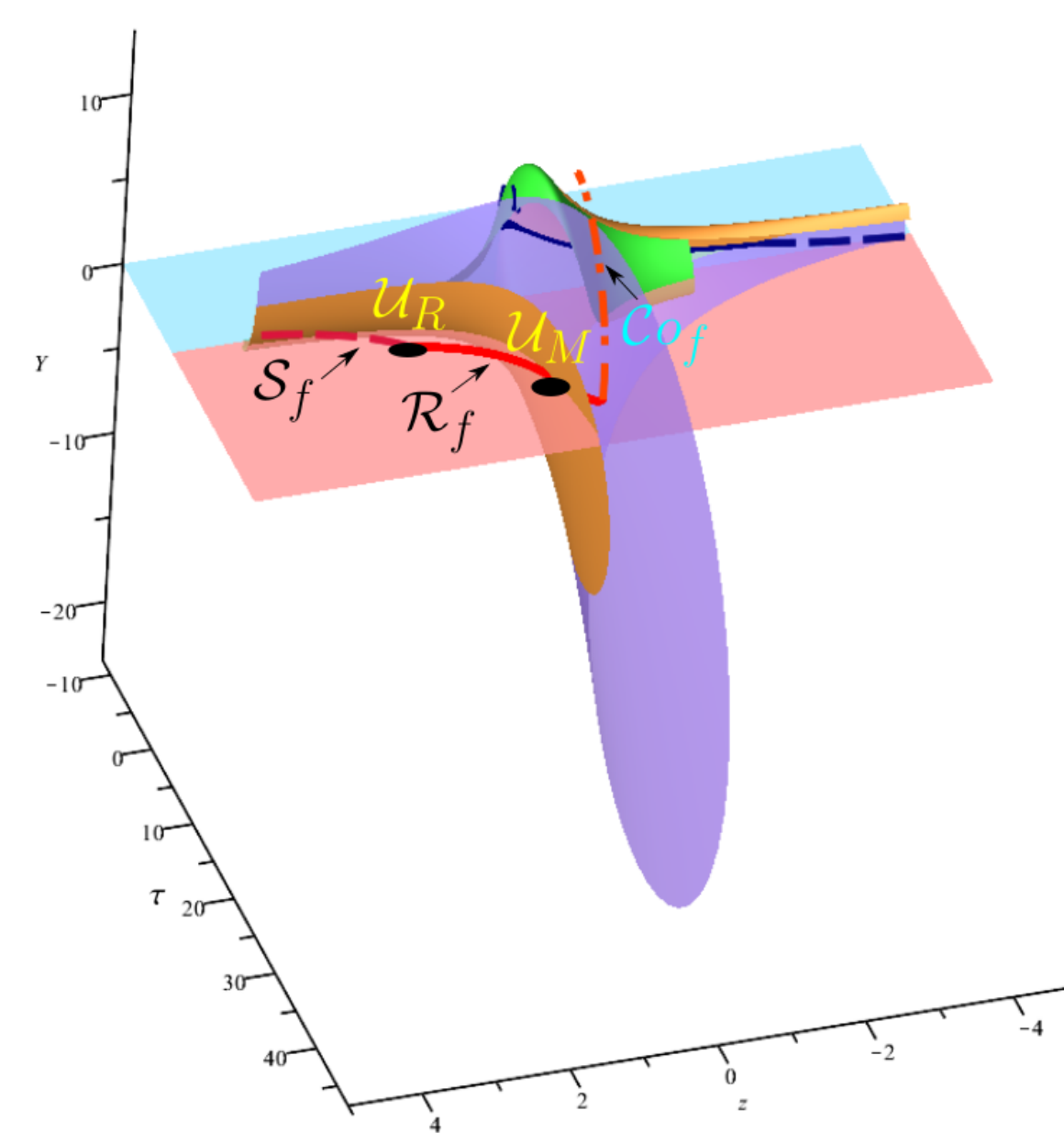


Figura 5: Representação do problema de Riemann na variedade de ondas.

Além de suavizar a geometria das soluções, a abordagem topológica indica fortemente estabilidade global da solução.

Referências

- [1] J. Glimm, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 697–715.
- [2] D. Schaeffer and M. Shearer, *The classification of 2×2 systems of non-strictly hyperbolic conservation laws, with application to oil recovery, with appendix by D. Marchesin, P.J. Paes-Leme, D.G. Schaeffer, M. Shearer*, Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), 141–178.
- [3] C. F. B. Palmeira, *Line Fields Defined by Eigenspaces of Derivatives of Maps from the Plane to Itself*, Proceedings of the VIth International Conference of Differential Geometry, Santiago de Compostela, Spain, (1988), 177–205.
- [4] C. S. Eschenazi, W. Lambert, M.M. López-Flores, D. Marchesin and C. F. B. Palmeira, *Decomposition of the Wave Manifold into Lax Admissible Regions and its Application to the Solution of Riemann Problems*. Available[online]: <https://arxiv.org/abs/2210.09354>, (2022).

Agradecimentos

M.M. López-Flores foi financiado pelo programa PCI do IMPA por meio do auxílio no. 300758/2022-7. D. Marchesin foi parcialmente financiado pela CAPES por meio do auxílio no. 88881.156518/2017-01, por CNPq por meio do auxílio no. 405366/2021-3, 306566/2019-2 e pela FAPERJ por meio dos auxílios E-26/010.001267/2016, E-26/202.764/2017, E-26/201.159/2021.