Dualidade entre G-graduações e G-ações

Maria Cláudia Sousa Resende[1]
Lorena Mara Costa Oliveira[2]
Universidade Federal de São João del-Rei

[1]mccsousaresende@aluno.ufsj.edu.br
[2]lorena.oliveira@ufsj.edu.br

Introdução

Sejam A uma álgebra G-graduada, G um grupo abeliano finito e F um corpo algebricamente fechado de característica zero. Queremos mostrar que existe uma dualidade entre G-graduações e G-ações.

Definição

Uma álgebra é G-graduada se A pode ser escrita como a soma direta de espaços vetoriais $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$, tais que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$, para todos $g, h \in G$.

Exemplo 1

Toda álgebra A possui uma G-graduação. De fato, basta considerar $A^{(1)} = A$ e $A^{(g)} = 0$, para todo $g \in G - \{1\}$. Esta G-graduação é chamada de G-graduação trivial.

Exemplo 2

Sejam $A_1 = \bigoplus_{g\in G} A_1^{(g)}$ e $A_2 = \bigoplus_{g\in G} A_2^{(g)}$ álgebras G-graduadas. Considere $B = A_1 \oplus A_2$ e $B^{(g)} = A_1^{(g)} \oplus A_2^{(g)}$, para todo $g \in G$. Então $B = \bigoplus_{g\in G} B^{(g)}$ fornece uma G-graduação para a álgebra B. Tal procedimento pode ser estendido para uma quantidade arbitrária de álgebras G-graduadas

Exemplo 3

Seja $A = M_n(F)$ a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre F. Fixe uma n-upla $\alpha = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$. Denotamos por e_{ij} as matrizes elementares usuais, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Para cada $g \in G$, considere o seguinte subespaço de A:

$$A^{(g)} = \text{span}_F \{e_{ij} | g_i^{-1} g_j = g\}$$

É imediato que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$, para todos $g, h \in G$. Assim, a decomposição $M_nF = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ é uma G-graduação para $M_n(F)$, chamada de graduação elementar induzida pela n-upla α. Vale ressaltar que podemos assumir $g_1 = 1$ em α.

Resultados

Definição

Sejam G um grupo e X um conjunto não vazio qualquer. G age à esquerda sobre X se para todo $x \in X$ e para todos $g_1, g_2 \in G$, temos:

- $x^1 = x$;
- $x^{g_1 g_2} = (x^{g_2})^{g_1}$

Teorema

Sejam G um grupo abeliano finito de ordem k, F um corpo algebricamente fechado e $\widehat{G} = \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$ o conjunto de todos os caracteres irredutíveis de G sobre F. Então existe uma dualidade entre G-graduações e $\widehat{G}$-ações em álgebras associativas A sobre F.

Exemplo

Considere $G = C_3 = \langle g \rangle$, o grupo cíclico de ordem 3 e $M = \text{span}_F = \{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{12}, e_{34}\}$. Seja $\widehat{G}$ o grupo dos caracteres irredutíveis de G, cujos elementos são apresentados na tabela a seguir, onde w é a raiz cúbica primitiva da unidade:

	1	g	g^2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	w	w^2
χ_3	1	w^2	w

Considere a G-graduação em M :
$M^{(1)} = \text{span}_F \{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}\}$,
$M^{(g)} = \text{span}_F \{e_{12}, e_{34}\}$ e
$M^{(g^2)} = \{0\}$.
Defina a ação de $\widehat{G}$ em M por:

$$\begin{aligned} \widehat{G} \times M &\to M \\ (\chi, a) &\mapsto \overline{\chi}(a) := \sum_{g\in G} \chi(g) a^g, \end{aligned}$$

onde $a = \sum_{g\in G} a^{(g)}$. Dessa forma, temos que:

- $\overline{\chi}_1 : M \to M, \overline{\chi}_1(a^{(1)} + a^{(g)} + a^{(g^2)}) = a^{(1)} + a^{(g)}$;
- $\overline{\chi}_2 : M \to M, \overline{\chi}_2(a^{(1)} + a^{(g)} + a^{(g^2)}) = a^{(1)} + wa^{(g)}$;
- $\overline{\chi}_3 : M \to M, \overline{\chi}_3(a^{(1)} + a^{(g)} + a^{(g^2)}) = a^{(1)} + w^2a^{(g)}$

fornecem todos os automorfismos em M induzidos pela $\widehat{G}$-ação. Portanto, $\widehat{G}$ age por automorfismos sobre M.
Agora, suponha que G age como automorfismos sobre M da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G \times M &\to M \\ (h, e_{11} + e_{44}) &\mapsto (e_{11} + e_{44}) \\ (h, e_{22} + e_{33}) &\mapsto (e_{22} + e_{33}) \\ (1, e_{12}) &\mapsto e_{12} \\ (g, e_{12}) &\mapsto w^2 e_{12} \\ (g^2, e_{12}) &\mapsto w e_{12} \\ (1, e_{34}) &\mapsto e_{34} \\ (g, e_{34}) &\mapsto w e_{34} \\ (g^2, e_{34}) &\mapsto w^2 e_{34}, \end{aligned}$$

para todo $h \in G$. Ao estender essa ação de G sobre M para uma ação da álgebra de grupo FG sobre M, temos que: $a^{\alpha_1 + \alpha_2 g + \alpha_3 g^2} = \alpha_1 a + \alpha_2 a^g + \alpha_3 a^{g^2}$, para todos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$.

Sabemos que, sendo $F = \overline{F}$, então $FG = \bigoplus_{i=1}^{3} FG f_i$, onde f_i é um idempotente minimal de FG, para todo $i = 1, 2, 3$.
Verifica-se de maneira breve que $f_1 = \frac{1}{3}(1 + g + g^2)$, $f_2 = \frac{1}{3}(1 + w^2 g + w g^2)$ e $f_3 = \frac{1}{3}(1 + w^2 g + w g^2)$.
Claramente, $f_1 + f_2 + f_3 = 1$
Definimos, $M^{(\chi_i)} = \{a \in M | a^g = \chi i(g) a, \forall g \in G\}$, para todo $\chi_i \in \widehat{G}$. Então $M = \bigoplus_{\chi\in\widehat{G}} M^{\chi}$ é uma $\widehat{G}$-graduação em M.

Conclusão

Ao considerar G um grupo abeliano finito, então se A é uma álgebra G-graduada, existe uma $\widehat{G}$-ação por automorfismo em A. Por outro lado, se temos uma $\widehat{G}$-ação em A, podemos construir uma G-graduação em A.

Referências

[1] OLIVEIRA,LORENA. Variedades de álgebras G-graduadas com involução graduada de crescimento quase polinomial. Impa, 2022.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Federal de São João del-Rei, em especial, ao Departamento de Matemática e Estatística e, ao fomento recebido.