Métricas ad-invariantes em álgebras de Lie

Marcos Ricardo Cavicchioli de Almeida

Orientadora: Profª Dra. Viviana del Barco

IMECC - Unicamp

marcos.r.cavicchioli@gmail.com

Resumo

Esta apresentação aborda assuntos estudados como parte de uma iniciação científica. O objeto de estudo são as álgebras de Lie, com foco em espaços vetoriais de matrizes, e métricas ad-invariantes, que são formas bilineares não-degeneradas que ao interagirem com o colchete de Lie definem transformações lineares antissimétricas. Estas ideias foram trabalhadas através de espaços de matrizes clássicos como $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ e $\mathfrak{su}(2)$, explorando isomorfismos entre essas estruturas e conceitos como álgebras de Lie simples, semi-simples e solúveis, e suas relações com a existência de uma métrica ad-invariante na álgebra de Lie.

Introdução e definições

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Uma álgebra de Lie consiste no par (V, [,]) onde

$$[\ ,\ ] : V \times V \longrightarrow V$$

é um produto de vetores, chamado colchete (ou comutador) com as seguintes propriedades:

1. É **bilinear**, isto é, dados α e β em $\mathbb{F}$ e u, v, w, r $\in$ V:

$$[\alpha u + v, w] = \alpha[u, w] + [v, w]$$

$$[u, \beta w + r] = \beta[u, w] + [u, r]$$

2. **Antissimétrico**, $\forall$ u $\in$ V temos:

$$[u, u] = 0$$

3. Satisfaz a **identidade de Jacobi**, $\forall$ u, v e w $\in$ V temos:

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$$

O espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$, $M_n(\mathbb{F})$, munido do colchete

$$[A, B] = AB - BA \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$$

é uma álgebra de Lie.

Um **ideal** é um subespaço $H \subset V$ tal que $\forall\, x \in H$ e $y \in V$ temos

$$[x, y] \in H$$

Segue da definição que todo ideal é uma subálgebra de Lie, já que o colchete é uma operação fechada em H.

Sejam (V, [,]) e (W, [,]') álgebras de Lie. Uma transformação linear $T : V \to W$ é um isomorfismo entre as álgebras de Lie se for inversível e se $\forall\, u, v \in V$:

$$T([u, v]) = [T(u), T(v)]'$$

Considere as seguintes álgebras de Lie:

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \,|\, X^* = -X,\ tr(X) = 0\}$$

$$\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, X^t = -X\}$$

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : tr(X) = 0\}$$

Fixando bases adequadas, temos que $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ são isomorfas através da transformação $ad : X \longrightarrow ad_X$, onde $ad_X(Y) = [X, Y]$. Por outro lado, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ e $\mathfrak{su}(2)$ **não são isomorfas, apesar de terem a mesma dimensão.**

Uma **métrica** é uma forma bilinear $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ simétrica que seja não-degenerada. Em dimensão finita, isto significa que sua matriz de representação é inversível, qualquer que seja a base de V. A forma B é dita **ad-invariante** se para quaisquer vetores X, Y e Z temos:

$$B(ad_X(Y), Z) = -B(Y, ad_X(Z))$$

Alguns resultados

- Se V é de dimensão finita, definimos a **forma de Cartan-Killing**:

  $$\kappa(X, Y) = \text{traço}(ad_X \circ ad_Y)$$

  Teorema 1. *A forma de Cartan-Killing é ad-invariante.*

  Assim, ela é uma métrica ad-invariante sempre que for não-degenerada, o que ocorre em $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ e $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ por exemplo. O mesmo ocorre em $\mathfrak{su}(2)$, já que esta é isomorfa a $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$.

  Uma álgebra de Lie é dita **simples** quando não possui ideais não-triviais, e uma **semi-simples** pode ser entendida como soma direta de álgebras de Lie simples. Como resultado mais relevante, temos:

  Teorema 2. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita é semi-simples se, e só se sua forma de Cartan-Killing é não-degenerada.*

  Ou seja, sempre temos uma métrica ad-invariante nestas álgebras. Nesta categoria temos $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ e $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$.

- Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definimos indutivamente sua série derivada da seguinte forma:

  $$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g} \quad ; \quad \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k]$$

  Dizemos que $\mathfrak{g}$ é solúvel se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$. Em relação a álgebras de Lie com essa estrutura, temos que:

  Teorema 3. *Uma álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e só se $\kappa(X, Y) = 0$ para todo X em $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e Y em $\mathfrak{g}$.*

  Nestes casos, a forma de Cartan-Killing é sempre degenerada. Entretanto, existem álgebras de Lie solúveis dotadas de métricas ad-invariantes, como por exemplo a subálgebra de Lie $\mathfrak{osc} \subset \mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$:

  $$\mathfrak{osc} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\ x_3 & x_1 & 0 & 0 \\ -2x_4 & x_3 & -x_2 & 0 \end{pmatrix} \middle|\, x_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le 4 \right\}$$

Conclusão

O fato de uma álgebra de Lie possuir ou não uma métrica ad-invariante pode estar intimimamente ligado às características de sua estrutura. Em álgebras de Lie semi-simples, sempre temos a forma de Cartan-Killing como uma forma bilinear deste tipo, mas isto não ocorre em álgebras de Lie solúveis, que podem ou não ter uma outra métrica ad-invariante. No geral, não se sabe quando uma álgebra de Lie que não é semi-simples possui uma métrica ad-invariante.

Referências

[1] K. Hoffmann and R. Kunze. *Linear Algebra (2nd Edition)*. Pearson, 1971.

[2] J. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag, 1972.

[3] L.A.B. San Martin. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, 1999.

[4] Wulf Rossmann. *Lie Groups: An Introduction through Linear Groups*. Oxford University Press, 2006.

[5] G. Ovando V. del Barco and F. Vittone. On the isometry groups of invariant lorentzian metrics on the heisenberg group. *Mediterr. J. Math*, (11(1)):137–153, 2014.

Agradecimentos

Este projeto de iniciação científica é fomentado pela FAPESP, número 2022/07595-9, e agradeço à fundação por todo o apoio. Agradeço também à minha orientadora, Viviana del Barco, por todos os ensinamentos.