Borsuk-Ulam para $\mathbb{S}^2$ e o Teorema das Panquecas

Mahmut Telles Cansiz
Universidade Federal do Paraná - UFPR
mahmut@ufpr.br

Resumo

Pergunta: Dado um polígono limitado com um formato qualquer, será que conseguimos, com um único corte em linha reta, dividí-lo em dois polígonos de mesma área? A resposta é sim! E podemos provar isso usando apenas conceitos de análise na reta.

Mas e se quisermos fazer a mesma coisa, só que com dois desses polígonos? Isto é, com um único corte em linha reta, podemos dividí-los em menores polígonos com metade de suas áreas originais? A resposta é sim! Mas provar isso não é tão simples...

Este resultado é uma consequência do famoso Teorema de Borsuk-Ulam para $\mathbb{S}^2$, objeto principal deste trabalho, e ele é chamado de “Teorema das Panquecas”. Neste trabalho, apresentarei a ideia de sua demonstração usando homotopias.
As versões mais gerais desses teoremas precisam de conceitos mais avançados de topologia algébrica para sua demonstração, mostrando que pode ser necessária matemática avançada para generalizar resultados simples.

Homotopia

Definição: Sejam $f, f' : X \to Y$ duas funções contínuas. Dizemos que f e f' são homotópicas se existir uma função contínua $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que:

$$F(x,0) = f(x) \quad \text{e} \quad F(x,1) = f'(x), \quad \forall x \in X$$

De maneira um pouco informal, podemos pensar que duas funções são homotópicas se conseguirmos “deformar” uma na outra de forma contínua.

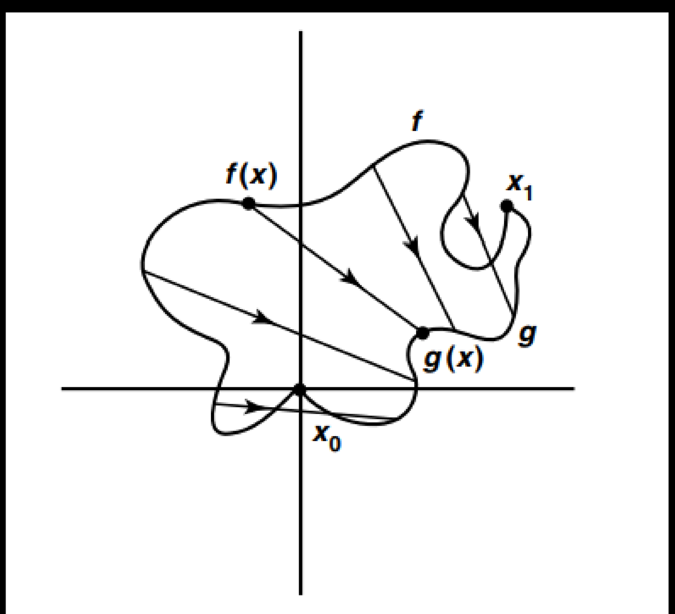

Figura 1: Exemplo da homotopia entre dois caminhos contínuos ligando x_0 e x_1. Fonte: [1], p. 325

Teorema 1

Se $h : \mathbb{S}^1 \to X$ é uma função contínua, então h é homotópica a uma função constante se, e somente se, h se estende à uma função contínua $k : B^2 \to X$, onde $B^2 = B[0,1] \subset \mathbb{R}^2$.

Teorema 2

Se $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ é uma função contínua que preserva antípodas, isto é, $h(-x) = -h(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$, então h não é homotópica a uma função constante.

Teorema 3

Não existe nenhuma função contínua $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ que preserve antípodas.

Demonstração: Suponha que $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ seja uma função contínua que preserva antípodas. Denotando $h := g|_{\mathbb{S}^1 \times 0} : \mathbb{S}^1 \times 0 \to \mathbb{S}^1$, notamos que h é uma bijeção contínua que preserva antípodas.
Pelo teorema 2, h não é homotópica a uma função constante.
Mas, existe um homeomorfismo k entre o hemisfério superior de $\mathbb{S}^2$ e B^2.
Assim, $g \circ k^{-1} : B^2 \to \mathbb{S}^1$ é uma extensão contínua de h.
Mas o Teorema 1 afirma, nesse caso, que h é homotópica a uma função constante, gerando uma contradição.

Borsuk-Ulam para $\mathbb{S}^2$

Se $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma função contínua, então existe $x \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Demonstração: Suponha que exista $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função tal que $f(x) \neq f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$.
Vamos definir $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ dada por $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{||f(x)-f(-x)||}$.
Como $g(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{||f(-x)-f(x)||} = -g(x)$, g será uma função contínua que preserva antípodas, contradizendo o Teorema 3.

Teorema das panquecas

Dadas duas regiões poligonais limitadas em $\mathbb{R}^2$, então existe uma reta em $\mathbb{R}^2$ que bissecta cada uma delas.

Demonstração: Sejam A_1 e A_2 dois polígonos limitados no plano $\mathbb{R}^2 \times 1 \subset \mathbb{R}^3$. Para cada $u \in \mathbb{S}^2$, vamos denotar como $P \subset \mathbb{R}^3$ o plano que passa pela origem e que tem u como vetor unitário normal. Esse plano divide $\mathbb{R}^2 \times 1$ em dois, assim como cada A_i. Vamos denotar por $f_i(u)$ a área da porção de A_i que está no mesmo lado de u.

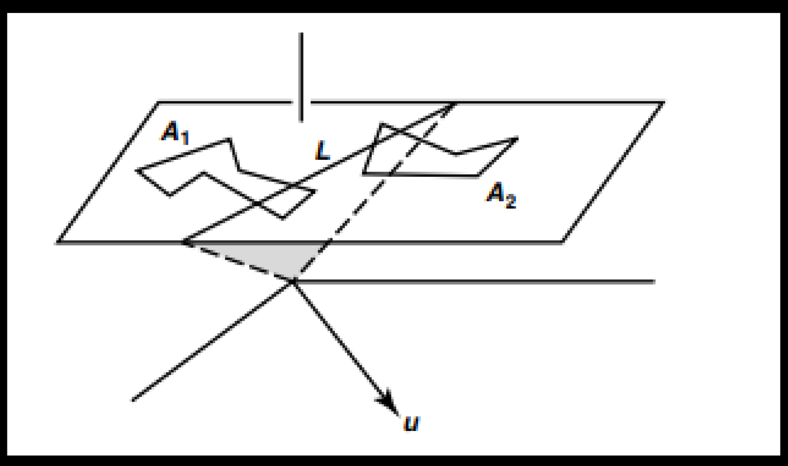

Figura 2: Exemplo de como seria o plano determinado por um vetor unitário u. Fonte: [1], p. 358

Assim, $f_i(-u)$ será a área da porção de A_i que está no lado oposto de u, fazendo com que $f_i(u) + f_i(-u) = \text{Área}(A_i)$.

Logo, definindo $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$F(u) = (f_1(u), f_2(u)),$$

obtemos, pelo Teorema de Borsuk-Ulam, que existe $x \in \mathbb{S}^2$ tal que $F(u) = F(-u)$, fazendo com que $f_i(u) = f_i(-u) = \frac{1}{2}\text{Área}(A_i)$.

Generalizações

Teorema de Borsuk-Ulam: Se $f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma função contínua, então existe $x \in \mathbb{S}^{n+1}$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Teorema: Se $A_1, \cdots, A_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ forem conjuntos limitados e mensuráveis, então existe um n-plano que bissecta todos eles.

Referências

[1] Munkres, J. R. **Topology**; Pearson College Div; 2nd edition (January 1, 2000)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à minha orientadora Gisele Teixeira Paula por me orientar na iniciação científica e ao Projeto PET - Matemática da UFPR pela bolsa no início dos meus estudos em topologia.