Matemática Condensada

Luiz Felipe Garcia

Universidade Federal de Santa Catarina

lfgarcia98@gmail.com

Resumo

Como lidar com objetos que carregam tanto uma estrutura algébrica quanto uma topologia? Muitas vezes, objetos assim não formam uma categoria adequada para se fazer álgebra. Por exemplo, a categoria de grupos abelianos topológicos não é abeliana, o que atrapalha o uso de ferramentas como Álgebra Homológica. Esse problema aparece em várias partes diferentes da matemática, como Análise Funcional, Geometria Algébrica, Topologia e Teoria dos Números e, em cada área. Neste trabalho, apresentamos uma solução particularmente interessante para o problema: a Matemática Condensada. As principais referências são [Pet19a], [Mai21], [Pet22], [Pet19b] e [Ásg21].

Como lidar com objetos que carregam tanto uma estrutura algébrica quanto uma topologia? Muitas vezes, objetos assim não formam uma categoria adequada para se fazer álgebra. Por exemplo, a categoria dos grupos abelianos topológicos não é abeliana, o que atrapalha o uso de ferramentas como Álgebra Homológica. Esse problema aparece em várias áreas da Matemática, como Análise Funcional, Geometria Algébrica, Topologia e Teoria dos Números e, em cada área, há uma abordagem diferente para resolvê-lo.

Conjuntos Condensados

Vamos ilustrar alguns defeitos que objetos podem apresentar quando possuem propriedades tanto topológicas quanto algébricas. Considere os grupos abelianos topológicos $\mathbb{R}$, que são os números reais com a operação de soma e a topologia usual, bem como $\mathbb{R}_{\text{disc}}$, que são os números reais com a soma e a topologia discreta. A função identidade

$$\mathbf{id} : \mathbb{R}_{\text{disc}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

é um morfismo de grupos abelianos topológicos em que $\ker \mathbf{id} = 0$ e $\operatorname{coker} \mathbf{id} = 0$, mas $\mathbf{id}$ não é um isomorfismo, já que os espaços não são homeomorfos! Este exemplo demonstra que a categoria dos grupos abelianos topológicos não é abeliana.

Pode-se pensar que isso é um defeito devido a topologia discreta ser patológica, porém isso não é verdade. O mesmo fenômeno ocorre com o morfismo de inclusão $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Este tipo de adversidade ocorre em diversas outras categorias de objetos que possuem estruturas tanto algébricas quanto topológicas. Um exemplo dentro da análise funcional é a inclusão $i : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, que também apresenta kernel e cokernel nulos, mas não configura um isomorfismo.

Para resolver isso, adotamos uma nova definição de espaço, a de conjunto condensado. Este é definido como um feixe sobre a categoria dos espaços compactos de Hausdorff. De forma explícita, um conjunto condensado é um funtor

$$\begin{aligned} X : \mathbf{CHaus}^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ S &\longmapsto X(S) \end{aligned}$$

que satisfaz

1. $X(\varnothing) \cong *$ é um conjunto unitário.
2. Há uma bijeção $X(S \sqcup T) \cong X(S) \times X(T)$.
3. Dado uma função contínua sobrejetora entre compactos Hausdorff $S \to T$, podemos formar o produto fibrado $S \times_T S$ que vem junto com dois mapas projeção $p_1, p_2 : S \times_T S \to S$. Há uma bijeção entre $X(T)$ e o equalizador $X(p_1)$ e $X(p_2)$.

Todo espaço topológico dá origem a um conjunto condensado de forma simples: Dado um espaço topológico X e um compacto Hausdorff S, seja $\mathrm{Cont}(S, X)$ o conjunto de funções contínuas de S para X. Não é difícil averiguar que

$$\begin{aligned} \underline{X} : \mathbf{CHaus}^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ S &\longmapsto \mathrm{Cont}(S, X) \end{aligned}$$

dá origem a um conjunto condensado! E é assim que vemos os espaços topológicos usuais como conjuntos condensados.

Resultados

O primeiro resultado é sobre a identificação $X \mapsto \underline{X}$ ser ou não plenamente fiel. Lembrando que funtores plenamente fieis são como inclusões de categorias.

Teorema 1. *O funtor $X \mapsto \underline{X}$ da categoria dos espaços topológicos para a categoria dos conjuntos condensados é fiel e quando ele é restrito a categoria dos espaços compactamente gerados ele é plenamente fiel.*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Top} \arrow[rr, "X \mapsto \underline{X}"] & & \mathbf{Condensados} \\ & \mathbf{Compactamente\ Gerados} \arrow[ul, "\subseteq"] \arrow[ur, "\subseteq"'] & \end{tikzcd}$$

Com esse teorema, obtemos uma gama de exemplos de espaços topológicos que ao serem considerados conjuntos condensados não há perda de informação.

Corolário 2. *Espaços localmente compactos ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}_p$, conjunto de cantor, variedades topológicas, conjuntos compactos...), espaços primeiro contáveis (espaços métricos, espaços pseudométricos, espaços segundo contáveis...), complexos CW... São todos conjuntos condensados.*

Já sabemos o que é um conjunto condensado, mais geralmente, dado uma categoria $\mathcal{C}$, um (objeto de $\mathcal{C}$) condensado é um funtor $\mathbf{CHaus}^{\text{op}} \to \mathcal{C}$ que satisfaz as mesmas propriedades **1**, **2** e **3** que um conjunto condensado precisa satisfazer.

Um exemplo de como conjuntos condensados se misturam muito bem com álgebra é o seguinte teorema:

Teorema 3. *A categoria dos grupos abelianos condensados tem todos os limites (e.g. kernel, equalizer, produtos...), colimites (e.g. cokernel, coequalizer, coprodutos...) e é uma categoria abeliana.*

Vamos voltar ao exemplo que começou toda essa discussão, vamos analisar a função identidade $\mathbf{id} : \mathbb{R}_{\text{disc}} \to \mathbb{R}$. Como grupos abelianos condensados, os nossos objetos são funtores: Para cada compacto Hausdorff S:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{R}} : S &\mapsto \{\text{funções contínuas } S \to \mathbb{R}\} \\ \underline{\mathbb{R}_{\text{disc}}} : S &\mapsto \{\text{funções localmente constantes } S \to \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

a função identidade se transforma numa transformação natural $i = \underline{\text{id}}$: Para cada compacto Hausdorff S:

$$i_S : \underline{\mathbb{R}_{\text{disc}}}(S) \to \underline{\mathbb{R}}(S)$$

em que i_S é justamente uma inclusão. Assim, ao calcularmos, vemos que de fato $\ker i = 0$, mas o cokernel não é nulo! Na verdade o cokernel é um conjunto condensado diferente de todo espaço topológico i.e. não existe espaço topológico X com $\underline{X} \cong \operatorname{coker} i$. De fato, o cokernel é o condensado:

$$\frac{\underline{\mathbb{R}}}{\underline{\mathbb{R}_{\text{disc}}}} : S \mapsto \frac{\{\text{funções contínuas } S \to \mathbb{R}\}}{\{\text{funções localmente constantes } S \to \mathbb{R}\}}$$

A Matemática Condensada já possui algumas aplicações interessantes: É possível fazer Análise Funcional Real e p-ádica usando essa nova linguagem. Outra mérito dos condensados foi que os matemáticos Peter Scholze e Dustin Clausen provaram resultados clássicos da Geometria Complexa usando conjuntos condensados. Por fim, os professores Scholze e Fargues aplicaram a linguagem dos condensados num artigo sobre a correspondência local de Langlands.

Referências

[Pet19a] Dustin Clausen Peter Scholze. *Lectures on Analytic Geometry*. 2019. URL: https://www.math.uni-%20bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf.

[Pet19b] Dustin Clausen Peter Scholze. *Lectures on Condensed Mathematics*. 2019. URL: http://www.math.%20uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf.

[Ásg21] Dagur Ásgeirsson. *The Foundations of Condensed Mathematics*. 2021. URL: https://dagur.sites.ku.dk/files/2022/01/condensed-foundations.pdf.

[Mai21] Catrin Mair. *Animated Condensed Sets and Their Homotopy Groups*. 2021. URL: https://arxiv.org/pdf/2105.07888.pdf.

[Pet22] Dustin Clausen Peter Scholze. *Condensed Mathematics and Complex Geometry*. 2022. URL: https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Complex.pdf.