O Teorema de Gauss-Bonnet via Método do Referencial Móvel

Luiz Carazolli

IMECC - Unicamp

l251378@dac.unicamp.br

Resumo

O Teorema de Gauss-Bonnet é um dos resultados mais expressivos da Geometria Diferencial, cobrindo a interseção existente entre as caracterizações geométrica e topológica de variedades Riemannianas (bidimensionais e compactas). Por sua vez, o Método do Referencial Móvel, desenvolvido por Élie Cartan, consiste em uma abordagem robusta para o estudo da geometria de variedades Riemannianas, e, em particular, é capaz de demonstrar o teorema em questão. O objetivo dessa apresentação é introduzir o Método do Referencial Móvel, de maneira a aplicá-lo na construção e na demonstração do Teorema de Gauss-Bonnet

Introdução e Objetivos

1. Será feita uma breve descrição do método do referencial móvel: a partir da escolha de campos vetoriais adequados sobre uma variedade riemanniana, serão obtidas as equações de estrutura. Então, obteremos entes geométricos intrínsecos à variedade estudada

   1.1 Conexão de Levi-Civita (1° equação de estrutura)

   1.2 Curvatura gaussiana (2° equação de estrutura)

   1.3 Derivada covariante e curvatura geodésica

2. Chegaremos ao Teorema de Gauss-Bonnet: serão dadas algumas definições e lemas que levarão à versão local do teorema (para 2-segmentos), e, finalmente, esse teorema será estendido globalmente para a variedade

   2.1 Fórmula de Gauss-Bonnet para quadriláteros

   2.2 Teorema de Gauss-Bonnet

1 Método do Referencial Móvel

Considere uma variedade diferenciável bidimensional M^2 munida de uma métrica riemanniana $\langle\ ,\ \rangle_p$

Definição 1.1. Um *referencial móvel ortonormal* $\{e_1, e_2\}$ é um par de campos vetoriais diferenciáveis em M, e_1, e_2, tais que para todo $p \in M$

$$\langle e_i(p), e_j(p)\rangle_p = \delta_{ij}$$

Associado a esse referencial móvel, definimos o co-referencial $\{\theta_1, \theta_2\}$ como o par de 1-formas diferenciais θ_1, θ_2 com a condição

$$\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$$

Teorema 1.1 (Levi-Civita - 1° equação de estrutura)**.** Sendo $\{e_1, e_2\}$ um referencial móvel ortonormal em M^2 e θ_1, θ_2 seu co-referencial associado, então existe uma única 1-forma (forma de conexão) $\omega_{12} = -\omega_{21}$ em M com

$$d\theta_i = \omega_{ij} \wedge \theta_j$$

Podemos obter grandezas geométricas relacionadas a M que sejam independentes do referencial escolhido

Curvatura gaussiana

Proposição 1.2 (2° equação de estrutura)**.** Existe uma função $K : M \to \mathbb{R}$ tal que para todo referencial móvel (ortonormal) $\{e_1, e_2\}$ temos

$$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$$

O número $K(p)$ é denominado *curvatura gaussiana de M em $p \in M$*

Derivada covariante e curvatura geodésica

Proposição 1.3. Sejam Y, V campos vetoriais diferenciáveis em M^2, $\{e_1, e_2\}$ um referencial móvel ortonormal e ω_{12} sua 1-forma de conexão. Escrevendo $Y = y_1e_1 + y_2e_2$, e sendo a derivada covariante de Y com relação a V ($\nabla_V Y$) o operador

$$\sum_{i=1,2}\left(V(y_i) + \sum_{j=1,2} y_j\omega_{ji}(V)\right)e_i$$

temos que $\nabla_V Y$ independe do referencial móvel

Proposição 1.4. Admitindo M orientável, seja $\alpha : [0,1] \to M^2$ uma curva regular (parametrizada pelo comprimento de arco) sobre M, e Y um campo vetorial diferenciável sobre α, tal que $\nabla_{\alpha'(s)}Y = 0$ (*i.e.* Y é paralelo sobre α). Sendo φ o ângulo entre $\alpha'(s)$ e $Y(\alpha(s))$, a curvatura geodésica de α é

$$\kappa_g(s) = \frac{d\varphi}{ds}$$

Lema 1.5. Sendo $\lambda : [0,1] \to M$ uma curva regular orientada por um referencial móvel $\{e_1, e_2\}$ e φ uma função ângulo entre e_1 e λ', então

$$\int_\lambda \kappa_g ds = \varphi(1) - \varphi(0) + \int_\lambda \omega_{12}$$

2 Teorema de Gauss-Bonnet

Definição 2.1.

- Um *2-segmento* $X : R \to M$ é a restrição $f|_R$ de uma carta local $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ a um retângulo $R \subset U$
- $\partial X = \alpha + \beta - \gamma - \delta$, onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são curvas regulares em M correspondentes aos lados de $X(R)$
- Os ângulos externos $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_4$ são os ângulos entre as curvas α e β, β e γ, *etc.* Isto é, os ângulos entre os vetores $\alpha'(1)$ e $\beta'(0)$, $\beta'(1)$ e $\gamma'(0)$, *etc* respectivamente

Lema 2.1. Sendo E, F, G os coeficientes da 1° forma fundamental, o *referencial móvel associado* ao 2-segmento X é $\{f_u/\sqrt(E), f_v/\sqrt{G}\}$. Com essa escolha de referencial móvel, $dM(e_1, e_2) = +1$

Fórmula para 2-segmentos

Teorema 2.2 (Gauss-Bonnet para 2-segmentos)**.** Sejam X um 2-segmento em M, $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_4$ os seus ângulos externos, então

$$\int_X K dM + \int_{\partial X} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^4 \varepsilon_j = 2\pi$$

Teorema de Gauss-Bonnet

Lema 2.3. Toda variedade diferenciável compacta admite decomposição retangular

Teorema 2.4 (Gauss-Bonnet)**.** Para uma variedade riemanniana M compacta e orientável,

$$\int_M K dM + \int_{\partial M} \kappa_g ds = 2\pi\chi(M)$$

onde $\chi(M)$ denota a característica de Euler de M

Conclusão

Partindo da definição de um referencial móvel sobre uma variedade riemanniana, foi possível caracterizá-la por meio de propriedades geométricas intrínsecas, bem como enunciar alguns resultados preliminares. Esses resultados, então, foram combinados na obtenção de um importante teorema - o Teorema de Gauss-Bonnet - primeiro na sua versão local (para 2-segmentos), e depois na sua versão global.

Referências

[1] Manfredo Perdigao do Carmo. *Formas Diferenciais e Aplicacoes*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[2] Barret O'neil. *Elementary Differential Geometry*. Elsevier Academic Press Publications, 2006.

[3] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry vol. 2*. Publish or Perish, Inc, 1979.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pela bolsa de IC, ao meu orientador, Prof. Dr. Lino Grama, pelo enorme apoio e atenção, e à minha família e amigos pelo grande incentivo