A Integral de Riemann via Nets

Lucca de Souza Dias

Universidade Federal do Espírito Santo

lucca.dias@edu.ufes.br

UFES

Resumo

Nesta apresentação, inicialmente, definiremos os conceitos de nets (ou redes) e questões de como sua convergência funciona. Então chegaremos em nosso resultado principal em que usaremos nets para definir a Integral de Riemann de uma outra forma (mais simples neste contexto), onde todas as propriedades de soma e produto de integrais serão dados como simples corolários do que já vimos para nets.

Introdução

O conceito de net, apresentado inicialmente por E. H. Moore e H. L. Smith em 1922, visa generalizar a noção de sequência. Isso permite que certos teoremas sejam válidos em um contexto mais generalizado.

Objetivos

- Apresentar as definições de Conjunto Dirigido e Nets;
- Mostrar como a convergência de Nets é definida;
- Apresentar conceitos necessários para chegarmos em nosso objetivo;
- Mostrar como a Integral de Riemman e alguns resultados podem ser vistos usando Nets.

Resultados

Conjunto dirigido

Diremos que uma pré-ordem (uma relação binária reflexiva e transitiva), $(\mathbb{D}, \preceq)$ é dirigida, ou que o conjunto $\mathbb{D}$ é dirigido pela pré-ordem $\preceq$, se para quaisquer $a, b \in \mathbb{D}$ existe $d \in \mathbb{D}$ com $a, b \preceq d$.

Nets

Para um conjunto $\mathbb{D}$ dirigido por uma pré-ordem $\preceq$, uma função $\eta : \mathbb{D} \to X$ é chamada de net em X.
Assim como fazemos com sequências, uma net η que faz $\eta(d) := x_d$ para cada $d \in \mathbb{D}$ sera denotada como $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$, ou apenas $(x_d)_d$.

Convergência em Nets

Diremos que uma net $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ no espaço topológico X converge para um ponto $x \in X$ se

$$\forall \epsilon > 0, \exists d \in \mathbb{D} \text{ tal que } a \succeq d \Rightarrow |x_a - x| < \epsilon$$

o que abreviamos com $x_d \to x$.

Partição

Uma partição de um conjunto X é uma coleção $\mathcal{P}$ de subconjuntos de X tal que X se escreve como união disjunta dos elementos de $\mathcal{P}$. No atual contexto, uma partição do intervalo $[a, b]$ consiste de uma sequência finita $a_0, a_1, ..., a_n$ de pontos, com $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ e

$$a := a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n := b$$

Para cada partição $\mathcal{P} := \{a_0, ..., a_n\}$ de $[a, b]$, faz sentido considerar o numero

$$\|\mathcal{P}\| := \max_{1\leq i\leq n} (a_i - a_{i-1}),$$

que indica o maior tamanho dos subintervalos da partição $\mathcal{P}$.
Dadas duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ do intervalo $[a, b]$, diremos que $\mathcal{Q}$ é mais fina do que $\mathcal{P}$, indicando por $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$, se ocorrer $\|\mathcal{Q}\| \leq \|\mathcal{P}\|$. Uma tag para uma partição $\mathcal{P} := \{a_0, ..., a_n\}$ do intervalo $[a, b]$ consiste de uma escolha de pontos $t_1, ..., t_n$ com $a_{i-1} \leq t_i \leq a_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Finalmente, escrevemos $(\mathcal{P}, t)$ para indicar uma partição marcada.

Soma de Riemann

Dada uma partição marcada $(\mathcal{P}, t)$ de $[a, b]$ e uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definimos a soma de Riemann da partição como sendo o número

$$\sum_{(\mathcal{P},t)} f := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}).$$

Diremos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se existir $L \in \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer partição marcada $(\mathcal{P}, t)$ de $[a, b]$, tenha-se

$$\|\mathcal{P}\| < \delta \Rightarrow \left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f - L\right| < \varepsilon.$$

Conclusão

A integral usando Nets

Vamos ver agora que a definição de Riemann-integrabilidade é, precisamente, a exigência de que uma net específica convirja!
De fato, fixado o intervalo fechado $[a, b]$, o conjunto

$$\mathbb{P} := \{(\mathcal{P}, t) : (\mathcal{P}, t) \text{é uma partição marcada de} [a, b]\}$$

é dirigido pela relação

$$(\mathcal{P}, t) \preceq (\mathcal{Q}, t) \iff \|\mathcal{Q}\| \leq \|\mathcal{P}\|.$$

Desse modo, para uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, a correspondência $\sum f : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ que faz

$$(\mathcal{P}, t) \mapsto \sum_{(\mathcal{P},t)} f$$

é uma net em $\mathbb{R}$. Pela definição que apresentamos, um número $L \in \mathbb{R}$ satisfaz $L = \lim_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \sum_{(\mathcal{P},t)} f$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição $(\mathcal{Q}, t)$ de $[a, b]$ tal que se $(\mathcal{P}, t) \succeq (\mathcal{Q}, t)$, então

$$\left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f - L\right| < \varepsilon$$

Como este L é único (pois é o limite de uma net), escrevemos $\int_a^b f$ para indicar o unico numero L na definicao de integrabilidade, o qual passa a ser chamado de a integral (de Riemann) da funcao $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Corolários

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então existe um único número $L \in \mathbb{R}$ satisfazendo a definição de integrabilidade.
- Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções Riemann-integráveis, tais que $f \leq g$, então
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$
- Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções Riemann-integráveis, então $\alpha f + \beta g$ é Riemann-integrável, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e vale
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Referências

[1] A. F. Beardon. *Limits: a new approach to real analysis*. Springer, 2002.

[2] E. Schechter. *Handbook of Analysis and its Foundations*. Academic Press, 1996.

Agradecimentos

Agradeço ao Programa de Educação Tutorial (PET), à UFES e ao IMPA pelo auxílio financeiro e pela oportunidade e ao meu orientador Renan Maneli Mezabarba pelo apoio em nossos estudos.