# Estados de borda e o invariante $\eta$


## Lucas de Souza & Rodrigo Fresneda & Dmitri Vassilevich

Universidade Federal do ABC

souza.l@ufabc.edu.br



### Resumo

Propomos uma relação entre o invariante $\eta$ em uma variedade com fronteira, os invariantes $\eta$ de estados de borda e o invariante $\eta$ em um limite de volume infinito. Com o exemplo de férmions planares com condições de contorno *bag* e *chiral bag*, mostramos que essa relação se mantém sempre que os estados de borda estão suficientemente bem localizados próximos à fronteira. Como subproduto, mostramos que o espectro de modos de borda para condições de contorno *chiral bag* é linear, mas limitado.


### Introdução

O invariante $\eta$ desempenha um papel importante na Teoria Quântica de Campos, descrevendo fenômenos como a anomalia de paridade e o fracionamento do número fermiônico. Na presença de bordo, o invariante $\eta$ exibe contribuições específicas associadas à fronteira. Embora tenha ocorrido progresso na compreensão das conexões entre invariantes $\eta$ no volume e na fronteira [1], ainda há questões em aberto, particularmente em relação aos operadores hermitianos de Dirac e para o problema do fracionamento do número de férmions. O objetivo deste trabalho é derivar as relações entre o invariante $\eta$ em uma variedade com modos de borda em teorias com operadores hermitianos de Dirac.

### Definições principais

Seja $H$ um operador hermitiano do tipo Dirac em uma variedade lisa $n$ dimensional $\mathcal{M}$, de bordo suave $\partial\mathcal{M}$ com autovalores $\lambda$. A função $\eta$ deste operador é definida como

$$\eta(s,H)=\sum_{\lambda>0}\lambda^{-s}-\sum_{\lambda<0}(-\lambda)^{-s}.$$

O invariante $\eta$ de Atiyah–Patodi–Singer é definido como $\eta_H=\frac{1}{2}(\eta(0,H)+\dim\,\mathrm{Ker}(H))$. Este invariante salta $\pm 1$ sempre que um autovalor cruza a origem. O invariante $\eta$ exponencial $\mathcal{E}(H)=\exp(-2\pi i\eta_H)$ é suave.

Seja $t$ um parâmetro real positivo. Então, para qualquer função suave de valor matricial $Q$, há uma expansão assintótica em $t\to+0$ do kernel de calor

$$\mathrm{Tr}\,\left(Q\exp(-tH^2)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}t^{\frac{k-n}{2}}a_k(Q,H^2)$$

Seja $\delta H$ uma variação de $H$, onde assumimos que $\delta H$ é uma função com valor matricial em vez de um operador diferencial. Se devido a esta variação nenhum autovalor passar por $0$, a variação correspondente de $\eta(0,H)$ é dada por [2]

$$\delta\eta(0,H)=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}a_{n-1}(\delta H,H^2). \tag{1}$$

Considere um plano $\mathbb{R}^2$ perfurado por um campo magnético perpendicular com fluxo finito e concentrado próximo à origem. O hamiltoniano de Dirac para os férmions confinados no plano é $H=\alpha^j(i\partial_j-eA_j)-\beta m$, onde $\alpha^j$ e $\beta$ são matrizes hermitianas $2\times 2$ satisfazendo

$$\mathrm{tr}\,\left(\alpha^k\alpha^j\beta\right)=-2i\epsilon^{kj},\quad \alpha^j\alpha^k+\alpha^k\alpha^j=2g^{jk},$$
$$\beta\alpha^j+\alpha^j\beta=0\quad\text{e}\quad\beta^2=1$$

O resultado de Niemi-Semenoff [3] para o plano $\mathbb{R}^2$ diz que

$$\eta(0,H)=-\frac{e}{4\pi}\frac{m}{|m|}\int_{\mathbb{R}^2}d^2x\,\epsilon^{jk}F_{jk}\,. \tag{2}$$

Consideremos um disco $D_r$ de raio $r$ centrado na origem. Sejam $\mathrm{n}$ vetor unitário apontando para dentro normal ao bordo $\partial D_r=S^1_r$, $\theta$ a coordenada em $S^1_r$ e $\sqrt{h}d\theta=rd\theta$ a medida de integração induzida. Defina

$$\eta_r(0,H):=\frac{e}{2\pi}\frac{m}{|m|}\int_{S^1_r}d\theta\,\sqrt{h}\,A_j\epsilon^{\mathrm{n}j},$$

de modo que $\eta_r(0,H)\to\eta(0,H)$ quando $r\to\infty$.

### Condições de contorno *bag*

Vamos calcular $\eta$ para $H_{D_r}$ com condições de contorno *bag*, definidas por

$$\Pi_-\psi|_{\partial\mathcal{M}}=0,\quad\text{com}\quad\Pi_\pm=\tfrac{1}{2}(1\pm i\varepsilon\beta\alpha^{\mathrm{n}})\quad\text{e}\quad\varepsilon=\pm 1$$

Também definimos $\chi:=\Pi_+-\Pi_-$ e $\Pi_\pm=\frac{1}{2}(1\pm\chi)$. Para essas condições, a componente normal da corrente fermiônica, $\psi^\dagger\alpha^{\mathrm{n}}\psi$, se anula em todos os pontos do bordo, de modo que $H$ é autoadjunto.

Para qualquer operador $H$ do tipo Dirac em uma variedade bidimensional $\mathcal{M}$ com condições de contorno *bag* em $\partial\mathcal{M}$

$$a_1(Q,H^2)=\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\int_{\partial\mathcal{M}}d\theta\,\sqrt{h}\,\mathrm{tr}\,(Q\chi). \tag{3}$$

Especificando $H=H_{D_r}$, $Q=\delta H_{D_r}=-e\alpha^j A_j$, usando a fórmula (1) para $n=2$ e integrando a variação obtemos

$$\eta(0,H_{D_r})=\frac{\epsilon e}{2\pi}\int_{S^1_r}d\theta\,\sqrt{h}\,A_j\epsilon^{\mathrm{n}j}. \tag{4}$$

Para analisar os estados de borda fixamos o *gauge* $A_{\mathrm{n}}=0$ próximo à fronteira e consideramos um problema de autovalor auxiliar $\hat{H}\varphi=\lambda\varphi$ em $\mathbb{R}_+$ onde o operador $\hat{H}$ é construído do seguinte modo: Seja $e^{\parallel}$ um vetor unitário tangente à fronteira, de modo que $(\alpha^{\parallel})^2=1$ com $\alpha^{\parallel}:=e^{\parallel}_j\alpha^j$. A coordenada correspondente no círculo é $x^{\parallel}=r\theta$. A função $\varphi$ é considerada uma autofunção de $i\partial_{\parallel}-eA_{\parallel}$ com autovalor $\xi$. Para $r$ suficientemente grande, a curvatura extrínseca da fronteira é desprezível e o problema auxiliar torna-se

$$i\alpha^{\mathrm{n}}(\partial_{\mathrm{n}}+q(\lambda,m,\xi))\varphi=0, \tag{3}$$
$$\text{com}\quad q(\lambda,m,\xi)=-i\alpha^{\mathrm{n}}(\alpha^{\parallel}\xi-\beta m-\lambda)\,.$$

$\varphi$ depende apenas da coordenada $x^{\mathrm{n}}$ e satisfaz a condição de contorno $\Pi_-\varphi(x^{\mathrm{n}}=0)=0$. Estados de borda correspondem à $\varphi\to 0$ quando $x^{\mathrm{n}}\to\infty$, o que significa que o autoespaço de $q(\lambda,m,\xi)$ associado à um autovalor positivo deve coincidir com o kernel de $\Pi_-$. Tomando uma representação em particular de $\alpha^j$ e $\beta$ obtemos o autovetor

$$\begin{pmatrix}-\xi+\sqrt{\xi^2-\lambda^2+m^2}\\ i(\lambda+m)\end{pmatrix} \tag{5}$$

da matriz $q(\lambda,m,\xi)$ associada ao autovalor positivo $\mu=\sqrt{\xi^2-\lambda^2+m^2}$. O kernel do projetor $\Pi_-$ é gerado pelo vetor

$$\begin{pmatrix}-1\\ i\varepsilon\end{pmatrix} \tag{6}$$

Os vetores (5) e (6) definem o mesmo subespaço vetorial sse $\varepsilon m\le 0$ e $\lambda=\varepsilon\xi$. A restrição de $H$ aos estados de borda é $H_{\mathrm{b}}=\varepsilon(i\partial_{\parallel}-eA_{\parallel})$.

A dependência dos estados de borda em $x^{\mathrm{n}}$ é definida pelo autovalor positivo $\mu=|m|$ de $q(\lambda,m,\xi)$, de modo que sempre que existem modos de bordo, eles decaem como $exp(-|m|x^{\mathrm{n}})$ e estão bem localizados relativamente à $r$ desde que $|m|r$ seja suficientemente grande. O hamiltoniano de bordo $H_{\mathrm{b}}$ é um operador do tipo Dirac unidimensional, então usando (1) para $n=1$, temos

$$\delta\eta(0,H_{\mathrm{b}})=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}a_0(\delta H_{\mathrm{b}},H_{\mathrm{b}}^2)=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{S^1_r}dx^{\parallel}\,\delta H_{\mathrm{b}}$$
$$=\frac{e\varepsilon}{\pi}\int_{S^1_r}dx^{\parallel}\delta A_{\parallel}=\frac{\varepsilon e}{\pi}\int_{S^1_r}d\theta\sqrt{h}\,\delta A_\theta\epsilon^{\mathrm{n}\theta}.$$

Integrando esta variação obtemos

$$\eta(0,H_{\mathrm{b}})=\frac{\varepsilon e}{\pi}\int_{S^1_r}d\theta\sqrt{h}\,A_\theta\epsilon^{\mathrm{n}\theta}.$$

Se $m/|m|=\varepsilon$ não há estados de fronteira e a expressão $\eta_r(0,H)$ coincide com $\eta(0,H_{D_r})$. Se $m/|m|=-\varepsilon$, as duas funções $\eta$ têm sinais opostos mas a diferença é compensada pela contribuição dos modos de bordo (4). Em geral,

$$\eta(0,H_{D_r})=\eta_r(0,H)+\eta(0,H_{\mathrm{b}}). \tag{7}$$

Em $r\to\infty$ obtemos exatamente a relação que estamos procurando (2).

### Condições de contorno mais gerais

Uma generalização natural das condições de contorno consideradas anteriormente são as condições de contorno *chiral bag*, que consiste em modificar $\chi$ para $\chi=i\varepsilon\beta e^{\tau\beta}\alpha^{\mathrm{n}}$ com $\tau$ sendo um parâmetro real. Embora a relação (3) não seja válida para este $\chi$ dado, foi demonstrado em um estudo anterior [4] que a parte suave de $\eta(0,H_{D_r})$ não depende de $\tau$, então a Eq. (4) ainda pode ser usada. Assim, mostra-se que existem estados de borda se

$$-\varepsilon(\lambda\sinh(\tau)+m\cosh(\tau))\ge 0 \tag{8}$$

enquanto a relação de dispersão é dada por

$$\lambda=\frac{\varepsilon\xi}{\cosh(\tau)}-m\tanh(\tau). \tag{9}$$

O espectro (9) é linear, mas existem estados de borda para quaisquer sinais de $\varepsilon$ e $m$, enquanto o espectro é limitado acima ou abaixo. Para que a Eq. (7) se mantenha, $\eta(0,H_b)$ deve desaparecer quando $\varepsilon m>0$. Não temos conhecimento de nenhum método de cálculo de invariantes $\eta$ para operadoras com espectro restrito como em (8). Se negligenciarmos esta restrição, $H_b=\varepsilon(\cosh(\tau))^{-1}(i\partial_{\parallel}-eA_{\parallel})-m\tanh(\tau)$ e pode ser tratado da mesma forma que o hamiltoniano de fronteira no caso anterior. Obtém-se assim um valor diferente de zero para $\eta(0,H_b)$ que depende de $A_{\parallel}$ e $m$. É difícil conceber que a imposição da restrição (8), que torna o espectro ainda mais assimétrico, possa eliminar a assimetria espectral medida pelo invariante $\eta$. O autovalor positivo de $q$ é $|\lambda\sinh(\tau)+m\cosh(\tau)|$. Perto do limiar do espectro (8) a taxa de decaimento é muito pequena, de modo que os modos de bordo *não* são bem localizados.

### Conclusões e discussão

Neste estudo, mostramos que o invariante $\eta$ pode ser representado como uma soma de uma parte de volume e uma contribuição dos estados de borda sempre que estes estiverem localizados em uma vizinhança suficientemente próxima da fronteira. Isso fornece uma nova interpretação do resultado clássico de Niemi-Semenof e abre novas perspectivas para pesquisas futuras. Como subproduto, derivamos o espectro de modos de borda para condições de contorno *chiral bag*. Este espectro nos lembra os estados de borda *Ferm arc* em semimetais de Weyl [5] que também ocupam uma região limitada no espaço de momento, apontando para novas aplicações físicas.

### Referências


[1] A. V. Ivanov and D. V. Vassilevich. Anomaly inflow for local boundary conditions. *JHEP*, 09:250, 2022.

[2] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 79:71–99, 1976.

[3] A. J. Niemi and G. W. Semenoff. Axial Anomaly Induced Fermion Fractionization and Effective Gauge Theory Actions in Odd Dimensional Space-Times. *Phys. Rev. Lett.*, 51:2077, 1983.

[4] A. V. Ivanov, M. A. Kurkov, and D. V. Vassilevich. Heat kernel, spectral functions and anomalies in Weyl semimetals. *J. Phys. A*, 55(22):224004, 2022.

[5] N. P. Armitage, E. J. Mele, and Ashvin Vishwanath. Weyl and Dirac Semimetals in Three Dimensional Solids. *Rev. Mod. Phys.*, 90(1):015001, 2018.



### Agradecimentos

Este trabalho foi financiado em partes pela FAPESP (2021/10128-0). O trabalho de LS é financiado pela FAPESP (2022/09068-6) e DV foi financiado pelo CNPq (304758/2022-1)